ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 19

Л. А. ЛЮСТЕРНИК

КРАТЧАЙШИЕ ЛИНИИ

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОЛЛЕДЖ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1955

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

ЛЕКЦИЯ 1

Глава I. **Кратчайшие линии на простейших поверхностях** 7

§ 1. Кратчайшие линии на многогранных поверхностях . . 7
§ 2. Кратчайшие линии на поверхности цилиндра 12
§ 3. Кратчайшие линии на конической поверхности 20
§ 4. Кратчайшие линии на поверхности шара 28

Глава II. **Некоторые свойства плоских и пространственных кривых и относящиеся к ним задачи** 36

§ 5. Касательная и нормали к плоским кривым и связанные с ними задачи 36
§ 6. Некоторые сведения из теории плоских и пространственных кривых 41
§ 7. Некоторые сведения из теории поверхностей 45

Глава III. **Геодезические линии** 47

§ 8. Теорема И. Бернулли о геодезических линиях 47
§ 9. Дополнительные замечания о геодезических линиях. 52
§ 10. Геодезические линии на поверхностях вращения . . . 57

ЛЕКЦИЯ 2

Глава IV. **Задачи, связанные с потенциальной энергией натянутой нити** 60

§ 11. Движения линий, не меняющие их длин 60
§ 12. Эволюты и эвольвенты 66
§ 13. Задачи на равновесие системы упругих нитей 67

Глава V. **Изопериметрическая задача** 72

§ 14. Кривизна и геодезическая кривизна 72
§ 15. Изопериметрическая задача 75

Глава VI. Прииции Ферма и его следствия 81
§ 16. Принцип Ферма 81
§ 17. Кривая рефракции 83
§ 18. Задача о брахистохроне 87
§ 19. Цепная линия и задача о наименьшей поверхности вращения 90
§ 20. Связь между механикой и оптикой 99

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей книжке исследуется с элементарной точки зрения ряд так называемых вариационных задач. В этих задачах рассматриваются величины, зависящие от кривой, и ищется кривая, для которой эта величина достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Таковы, например, задачи: среди всех кривых, соединяющих две точки на некоторой поверхности, найти кратчайшую; на плоскости среди всех замкнутых кривых заданной длины найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь, и т. д.

Материал этой книги в основном излагался автором на лекциях в школьном математическом кружке МГУ. Содержание первой лекции (§§ 1—10) в основном совпадает с содержанием вышедшей в 1940 г. брошюры автора «Геодезические линии».

У читателя предполагается только знакомство с курсом элементарной математики. При этом первые главы носят совершенно элементарный характер, другие же, не требуя специальных знаний, требуют несколько большего навыка к математическому чтению и размышлению.

Весь материал книжки можно рассматривать как элементарное введение в вариационное исчисление (так называется тот раздел математики, в котором систематически изучаются задачи на отыскание минимума или максимума функционалов). Вариационное исчисление не входит в первый концентр курса «высшей математики», изучающегося, например, в технических вузах. Однако мы считаем, что для человека, приступающего к изучению курса «высшей математики», не бесполезно заглянуть подальше вперед.

Для читателя, знакомого с элементами математического анализа, не представит труда сделать некоторые определения и рассуждения, излагаемые в книжке не строго, совершенно

строгими (поясняющие соображения для этого он часто найдет в тексте, данном мелким шрифтом); нужно, например, говорить не о малых величинах и их приближенном равенстве, а о бесконечно малых величинах и их эквивалентности. Если более взыскательный читатель останется все же неудовлетворенным допущенным здесь уровнем строгости и логической законченности рассмотрений, то пусть это послужит для него объяснением необходимости той логической шлифовки основных понятий математического анализа, с которой он столкнется, например, в университетских курсах анализа. Без этой шлифовки невозможно строгое и систематическое изложение таких глав анализа, как вариационное исчисление.

Математический анализ выработал мощный аналитический аппарат, решающий иногда автоматически многие трудные задачи. Однако на всех этапах овладения математикой исключительно важно видеть простой геометрический или физический смысл решаемой задачи. Нужно уметь решать задачи «на пальцах», как говорят математики, т. е. находить пусть нестрогое, но простое и наглядное доказательство.

Если эта небольшая книжка хоть в некоторой мере будет способствовать развитию у читателей этих элементов математической культуры, то автор будет считать, что труд, затраченный им на ее написание, оказался не бесполезным.

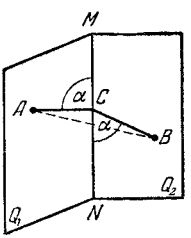
ЛЕКЦИЯ 1

ГЛАВА I. КРАТЧАЙШИЕ ЛИНИИ НА ПРОСТЕЙШИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

§ 1. Кратчайшие линии на многогранных поверхностях

1. Кратчайшая линия на двугранном угле. Читателю, конечно, известно, что прямолинейный отрезок является кратчайшей из всех линий, соединяющих на плоскости две точки.

Рассмотрим теперь две точки A и B на произвольной поверхности; их можно соединить бесчисленным множеством различных линий, лежащих на этой поверхности. Но какая из этих линий является кратчайшей? Иначе говоря, как следует двигаться по поверхности, чтобы кратчайшим путем попасть из точки A в точку B?



Черт. 1.

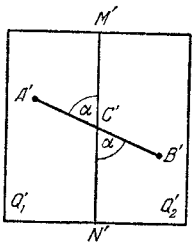
Мы решим эту задачу сначала для некоторых поверхностей простейшего вида. Начнем с такой задачи: дан двугранный угол [1]) с гранями Q_1 и Q_2 и ребром MN; на этих гранях заданы две точки: точка A на Q_1 и точка B на Q_2 (черт. 1). Точки A и B можно соединить бесчисленным множеством различных линий, расположенных на гранях Q_1 и Q_2 двугранного угла. Найти кратчайшую из этих линий.

Если двугранный угол равен двум прямым углам (180°), то грани Q_1 и Q_2 составляют продолжение одна другой (т. е.

---

[1]) На черт. 1 дана лишь *часть* этого бесконечного двугранного угла.

составляют одну плоскость) и искомой кратчайшей линией является прямолинейный отрезок AB, соединяющий точки A и B. Если же двугранный угол не равен двум прямым углам, то грани Q_1 и Q_2 не составляют одна продолжение другой и прямолинейный отрезок AB не лежит на этих гранях. Повернем одну из граней вокруг прямой MN так, чтобы обе грани сделались продолжением одна другой, иначе говоря, развернем двугранный угол на плоскость (черт. 2). Грани Q_1 и Q_2 перейдут в полуплоскости Q_1' и Q_2'. Прямая MN перейдет в прямую $M'N'$, отделяющую Q_1' и Q_2'; точки A и B перейдут в точки A' и B' (A' расположена на Q_1', B' — на Q_2'); каждая линия, лежащая на гранях двугранного угла и соединяющая точки A и B, перейдет в линию той же длины, соединяющую точки A' и B' на нашей плоскости. Кратчайшая из линий на гранях двугранного угла, соединяющая точки A и B, перейдет в кратчайшую из линий, соединяющих на плоскости точки A' и B', т. е. в прямолинейный отрезок $A'B'$. Этот отрезок пересекает прямую $M'N'$ в некоторой точке C', причем углы $A'C'M'$ и $N'C'B'$ равны как вертикальные (черт. 2). Величину каждого из них обозначим буквой α.



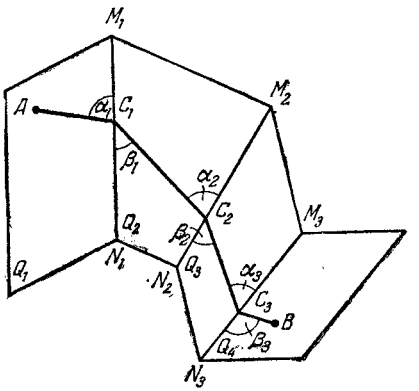
Черт. 2.

Повернем теперь Q_1' и Q_2' вокруг $M'N'$ так, чтобы вновь получить первоначальный двугранный угол. Полуплоскости Q_1' и Q_2' обратятся опять в грани Q_1 и Q_2 этого двугранного угла, $M'N'$ — в его ребро MN, а точки A' и B' — в точки A (на грани Q_1) и B (на грани Q_2), прямолинейный отрезок $A'B'$ перейдет в кратчайшую линию, лежащую на гранях двугранного угла и соединяющую точки A и B. Эта кратчайшая линия есть, очевидно, ломаная ACB, у которой звено AC расположено на грани Q_1, а CB — на грани Q_2. Очевидно, углы ACM и NCB, в которые перешли равные между собой углы $A'C'M'$ и $N'C'B'$, попрежнему равны α и, значит, равны между собой. Итак, *кратчайшая из линий, лежащих на гранях двугранного угла и соединяющих две его точки A и B (находящиеся на различных его гранях), есть ломаная ACB, имеющая вершину C на ребре MN, причем углы ACM и NCB, образованные звеньями ломаной с ребром, равны между собой.*

Рассмотренной задаче придают иногда полушутливый характер. Муха хочет переползти из точки A, лежащей на

одной стене, в точку B, лежащую на соседней стене. Как она должна двигаться по стенам, чтобы кратчайшим путем попасть из точки A в точку B. Теперь уже не составляет труда найти решение.

2. Кратчайшая линия на многогранной поверхности. Перейдем к рассмотрению несколько более сложного случая. Дана многогранная поверхность (черт. 3), состоящая из нескольких граней Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, ..., Q_n с ребрами M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, ..., $M_{n-1}N_{n-1}$ (на черт. 3 $n=4$). На двух разных гранях этой многогранной поверх-

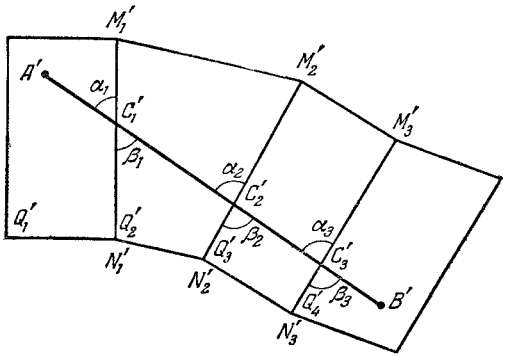


Черт. 3.

ности (например, на Q_1 и Q_4) даны точки A и B. Найти на этой многогранной поверхности кратчайшую линию, соединяющую точки A и B.

Пусть кратчайшей будет линия AB и пусть она проходит по граням Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Развернем часть многогранной поверхности, состоящую из этих граней, на плоскость (черт. 4). При этом грани перейдут в многоугольники этой плоскости Q_1', Q_2', Q_3', Q_4', а ребра M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, по которым прилегали друг к другу грани Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, перейдут в стороны $M_1'N_1'$, $M_2'N_2'$, $M_3'N_3'$ многоугольников Q_1', Q_2', Q_3', Q_4', по которым эти последние прилегают друг к другу. Точки A и B перейдут в точки A' и B' плоскости, а линии, соединяющие их на развертываемой части многогранной поверхности, перейдут в линии на плоскости, соединяющие точки A' и B'. Кратчайшая из линий, соединяющих A и B, перейдет в кратчайшую плоскую линию, соединяющую

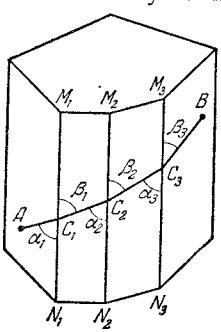
точки A' и B', т. е. в прямолинейный отрезок $A'B'$ [1]). Здесь полностью повторяются предыдущие рассуждения: вертикальные углы α_1 и β_1, образованные прямой $A'B'$ со стороной $M_1'N_1'$, равны между собой; точно так же равны попарно между



Черт. 4.

собой вертикальные углы α_2 и β_2, α_3 и β_3, образованные прямой $A'B'$ со сторонами $M_2'N_2'$, $M_3'N_3'$ (черт. 4).

Если снова согнуть часть плоскости, составленную из наших многоугольников, в многогранную поверхность так, чтобы многоугольник Q_1' вновь превратился в грань Q_1, многоугольник Q_2' — в грань Q_2, многоугольник Q_3' — в грань Q_3 и, наконец, Q_4' — в грань Q_4, то точки A' и B' перейдут в точки A и B, а отрезок $A'B'$ превратится в линию $\overset{\smile}{AB}$, в кратчайшую из линий на многогранной поверхности, соединяющих точки A и B. Этой кратчайшей линией будет ломаная, вершины которой расположены на ребрах M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 многогранной поверхности. Углы α_1 и β_1 (а также α_2 и β_2, α_3 и β_3), которые образуют с ребром поверхности два смежных звена ломаной, равны между собой.



Черт. 5.

3. Кратчайшая линия на боковой поверхности призмы. На черт. 5 изображены призма [2]) и крат-

[1]) Случай, когда $A'B'$ пересекает другие стороны этих многоугольников, здесь не рассматривается.

[2]) Грани призмы надо мыслить неограниченно продолженными.

чайшая из всех линий на ее поверхности, соединяющих две точки A и B, лежащие на разных гранях призмы. Этой кратчайшей линией является ломаная с вершинами C_1, C_2, C_3 на ребрах призмы, причем углы двух ее смежных звеньев с ребром призмы, на котором лежит их общая вершина, в силу предыдущего равны между собой:

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3, \ldots$$

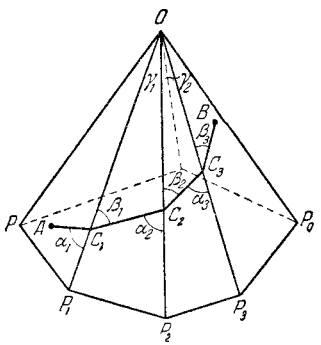
Но, кроме того, мы имеем $\beta_1 = \alpha_2$.

В самом деле, эти углы являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых M_1N_1 и M_2N_2 и секущей C_1C_2. Точно так же $\beta_2 = \alpha_3$.

Итак, мы имеем

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \ldots$$

Иначе говоря, *углы, образованные звеньями кратчайшей ломаной линии AB на поверхности призмы со всеми ее ребрами, равны между собой.*



Черт. 6.

4. Кратчайшая линия на поверхности пирамиды. Пусть на двух боковых гранях пирамиды [1]) с вершиной O заданы две точки A и B (черт. 6). Эти точки можно соединить на поверхности пирамиды бесчисленным множеством линий, среди которых есть кратчайшая $\overset{\smile}{AB}$. На основании предыдущего линия $\overset{\smile}{AB}$ есть ломаная линия, вершины которой C_1, C_2, C_3, ... лежат на ребрах пирамиды, а углы α_1 и β_1, α_2 и β_2, α_3 и β_3, ..., образованные звеньями этой ломаной с ребрами пирамиды, попарно равны:

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3, \ldots$$

Рассмотрим грань P_1OP_2, на которой лежит звено C_1C_2; если γ_1 означает угол P_1OP_2, то в треугольнике C_1OC_2 угол α_2 является внешним, а углы β_1 и γ_1 — внутренними. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним не смежных, следовательно,

$$\alpha_2 = \beta_1 + \gamma_1 \text{ или } \alpha_2 - \beta_1 = \gamma_1.$$

[1]) Грани пирамиды мыслятся неограниченно продолженными.

Но так как $\beta_1 = \alpha_1$, то $\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma_1$.

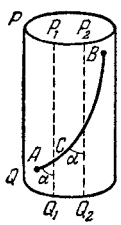
Аналогично $\alpha_3 - \alpha_2 = \gamma_2$, где γ_2 — угол при вершине O между соседними боковыми ребрами OP_2 и OP_3, и т. д.

Таким образом, *разность углов, под которыми кратчайшая линия пересекает какие-либо два ребра пирамиды, равна сумме соответствующих плоских углов при вершине.*

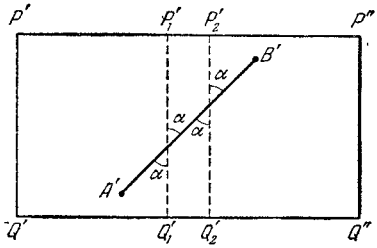
§ 2. Кратчайшие линии на поверхности цилиндра

1. Кратчайшая линия на поверхности цилиндра. Перейдем теперь к разысканию кратчайших линий на некоторых простейших кривых поверхностях. Начнем с поверхности круглого цилиндра [1]).

Напомним предварительно, что поверхность цилиндра можно покрыть системой прямых линий, параллельных оси цилиндра, а следовательно, и друг другу. Эти прямые называются *образующими* цилиндра.



Черт. 7.



Черт. 8.

Зададим на поверхности цилиндра две точки A и B (черт. 7). Будем искать среди кривых, расположенных на цилиндре и соединяющих точки A и B, ту, которая обладает наименьшей длиной. Обозначим эту кратчайшую кривую, соединяющую точки A и B, через $\overset{\smile}{AB}$. Сначала рассмотрим случай, когда A и B не лежат на одной образующей.

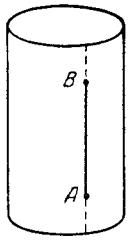
Разрежем боковую поверхность цилиндра по некоторой образующей PQ (не пересекающей $\overset{\smile}{AB}$) и развернем ее на плоскость; получим некоторый прямоугольник (черт. 8) (одна пара сторон прямоугольника, $P'P''$ и $Q'Q''$, получилась от развертывания окружностей, ограничивающих боковую по-

[1]) Рассматриваемая сейчас поверхность *конечного* цилиндра (черт. 7) есть часть поверхности бесконечного цилиндра.

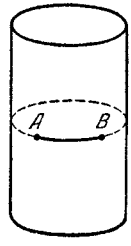
верхность цилиндра; другая пара, $P'Q'$ и $P''Q''$, образовалась из двух краев разреза PQ). Образующие цилиндра перейдут в прямые, параллельные стороне $P'Q'$ прямоугольника. Точки A и B перейдут в точки A' и B', лежащие внутри прямоугольника. Линии, соединяющие на цилиндре точки A и B, перейдут в плоские линии, соединяющие точки A' и B' внутри прямоугольника. Дуга $\overset{\smile}{AB}$ — кратчайшая из линий на цилиндре, соединяющих точки A и B, — перейдет в кратчайшую из плоских линий, соединяющих точки A' и B', т. е. в прямолинейный отрезок $A'B'$. Таким образом, после развертывания боковой поверхности цилиндра в плоский прямоугольник *кратчайшая дуга* $\overset{\smile}{AB}$ *на поверхности цилиндра переходит в прямолинейный отрезок* $A'B'$. Образующие цилиндра P_1Q_1, P_2Q_2, ... переходят в прямые $P_1'Q_1'$, $P_2'Q_2'$, ..., параллельные сторонам $P'Q'$, $P'Q''$ прямоугольника $P'Q'Q''P''$. Углы, которые образует отрезок $A'B'$ с этими прямыми, равны как соответственные углы при параллельных линиях. Обозначим величину каждого из них через α.

Теперь свернем прямоугольник $P'Q'Q''P''$ (склеив его противоположные стороны $P'Q'$ и $P''Q''$) так, чтобы он вновь принял первоначальную форму цилиндра. Точки A' и B' перейдут вновь в точки A и B цилиндра, а прямолинейный отрезок $A'B'$, их соединяющий, — в кратчайшую дугу $\overset{\smile}{AB}$ на поверхности цилиндра; углы отрезка $A'B'$ с прямыми $P_1'Q_1'$, $P_2'Q_2'$ перейдут в равные им углы между дугой $\overset{\smile}{AB}$ и образующими P_1Q_1, P_2Q_2, ... цилиндра. Так как прямая $A'B'$ пересекла все прямые, параллельные $P'Q'$, под равными углами α, то *кратчайшая дуга* $\overset{\smile}{AB}$, в которую переходит $A'B'$, *пересекает все образующие цилиндра под равными углами* α (черт. 7).

Рассмотрим особый случай, когда точки A и B лежат на одной образующей (черт. 9). В этом случае, очевидно, *отрезок* AB *образующей будет кратчайшим расстоянием между точками* A *и* B *на поверхности цилиндра.*



Черт. 9.



Черт. 10.

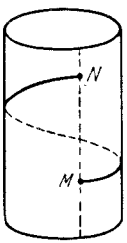
Выделим еще случай, когда точки A и B лежат на одном круговом сечении цилиндра (черт. 10). *Дуга* $\overset{\smile}{AB}$ *этого сечения*

перпендикулярна ко всем образующим. Она служит кратчайшей дугой, соединяющей точки A и B.

Если разрезать цилиндр по образующей, не пересекающей дуги $\overset{\frown}{AB}$, и развернуть его в плоский прямоугольник, то в двух особо рассмотренных случаях кратчайшая дуга перейдет в отрезок, параллельный сторонам прямоугольника. Во всех остальных случаях кратчайшая линия пересекает образующие под углом, отличным от прямого (и не равным нулю) [1]).

2. Винтовые линии. *Винтовой линией* называется линия на поверхности цилиндра, которая пересекает все образующие цилиндра под равными углами, отличными от прямого.

Будем обозначать угол между винтовой линией и образующей через α. Линия, пересекающая образующие цилиндра под прямым углом, есть круговое сечение. Можно рассматривать круговое сечение как предельный случай винтовой линии, когда α обращается в прямой угол. Точно так же образующую цилиндра можно рассматривать как другой предельный случай, когда α обращается в нуль.



Черт. 11.

Рассмотрим два движения по поверхности цилиндра: движение параллельное оси (по образующей), и вращение вокруг оси (по круговому сечению) с постоянными скоростями.

Каждое из этих движений можно вести в двух противоположных направлениях. Будем считать на вертикальном цилиндре движение вверх положительным, движение вниз отрицательным. Будем считать *положительным вращением* вращение на вертикальном цилиндре справа налево (для того, кто стоит вдоль оси головой вверх), или против движения часовой стрелки. Будем считать *отрицательным вращением* вращение слева направо — по движению часовой стрелки.

Движение по винтовой линии получается в результате складывания двух движений: движения, параллельного оси цилиндра, и вращения вокруг оси. Винтовая линия называется *правой*, если по ней движение вверх сочетается с положительным вращением — справа налево (черт. 11),

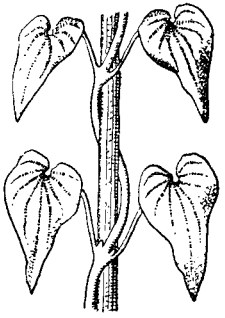
---

[1]) Интересно сравнить нашу задачу отыскания кратчайшей линии на поверхности цилиндра с рассмотренной на стр. 10 задачей отыскания кратчайшей ломаной на поверхности призмы (для которой наша задача является предельной).

левой, если по ней движение вверх сопровождается отрицательным вращением (слева направо).

Большинство вьющихся растений (вьюнок, фасоль), завиваясь вокруг вертикальной опоры, принимает форму правых винтовых линий (черт. 12). С другой стороны, хмель, например, принимает форму левой винтовой линии (черт. 13).

Пусть, двигаясь по винтовой линии, точка пересечет некоторую образующую в точке M, а при продолжении движения по винтовой линии она вновь пересечет эту же образующую в точке N; когда точка прошла дугу $\overset{\smile}{MN}$ винтовой линии, она совершила полный оборот вокруг оси цилиндра; в это



Черт. 12.

Черт. 13.

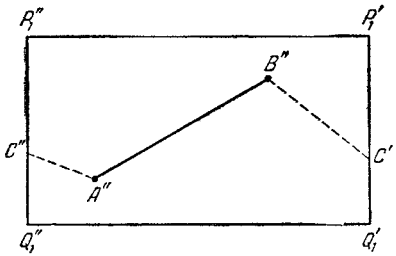
же время она прошла вверх расстояние, равное длине отрезка MN (черт. 11). Если скорость вращательного движения равна нулю и точка перемещается только параллельно оси цилиндра по образующей, наступает первый предельный случай; другой предельный случай наступит, если скорость перемещения, параллельного оси цилиндра, равна нулю и точка только вращается вокруг оси по окружности.

Из того, что было сказано выше, следует

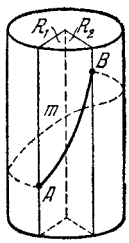
Теорема. *Кратчайшая дуга $\overset{\smile}{AB}$ на поверхности цилиндра, соединяющая две заданные точки A и B, есть дуга винтовой линии.*

3. Винтовые дуги, соединяющие две заданные точки. Две точки на поверхности цилиндра можно соединить различными винтовыми дугами. В самом деле, пусть две точки на поверхности цилиндра соединены кратчайшей дугой $\overset{\frown}{AB}$; эта дуга — дуга винтовой линии, и при развертывании поверхности цилиндра (разрезанной вдоль образующей, не пересекающей дуги $\overset{\frown}{AB}$) в плоский прямоугольник она перейдет в прямоугольный отрезок (черт. 7 и 8).

Разрежем теперь цилиндр вдоль образующей P_1Q_1, пересекающей кратчайшую дугу $\overset{\frown}{AB}$ в точке C (черт. 7). Линия $\overset{\frown}{AB}$ окажется разрезанной на две части $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{CB}$; если



Черт. 14.



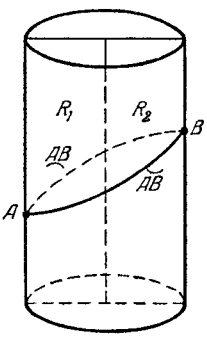
Черт. 15.

развернуть поверхность цилиндра в плоский прямоугольник, то точки A и B перейдут в точки A'' и B'' прямоугольника (черт. 14), а части $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{CB}$ дуги $\overset{\frown}{AB}$ перейдут соответственно в прямолинейные отрезки $A''C''$ и $B''C'$. Но точки A'' и B'' можно соединить прямолинейным отрезком $A''B''$, лежащим внутри прямоугольника $P_1'Q_1'Q_1''P_1''$. Очевидно, $A''B''$ короче всякой другой линии, лежащей внутри этого прямоугольника и соединяющей точки A'' и B''.

Свернем снова наш прямоугольник в цилиндр, склеив боковые стороны $P_1'Q_1'$ и $P_1''Q_1''$ так, чтобы точка C' слилась с точкой C'' и заняла положение C; тогда точки A'' и B'' вновь перейдут в точки A и B на поверхности цилиндра, а отрезки $A''C''$ и $B''C'$ перейдут в дугу $\overset{\frown}{AB}$, кратчайшую из всех линий на поверхности цилиндра, соединяющую точки A и B. Отрезок же $A''B''$ перейдет в дугу винтовой линии $\overset{\frown}{AB}$, соединяющей те же точки A и B. На черт. 15

$\overset{\smile}{AB}$ есть дуга правой, а $\overset{\frown}{AB}$ — левой винтовой линии, проходящей через точки A и B.

Линии, не пересекающие стороны прямоугольника, после того как он будет свернут в цилиндр, перейдут в линии, не пересекающие образующей P_1Q_1 (так как по этой прямой склеились стороны $P_1'Q_1'$ и $P_1''Q_1''$ нашего прямоугольника). Среди этих линий кратчайшей будет дуга $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AmB}$ (черт. 15). Но она может не оказаться самой короткой из *всех* линий на поверхности цилиндра, соединяющих точки A и B, ибо, если $\overset{\smile}{AB}$ короче, чем $\overset{\frown}{AB}$, то тем самым $\overset{\frown}{AB}$ не является кратчайшей среди кривых, лежащих на поверхности цилиндра и соединяющих точки A и B.

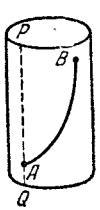


Черт. 16.

Проведем через точку A и ось цилиндра полуплоскость R_1, а через точку B и ось цилиндра полуплоскость R_2 (черт. 15).

Эти полуплоскости образуют два двугранных угла. В одном из них заключена дуга $\overset{\smile}{AB}$, а в другом — дуга $\overset{\frown}{AB}$. Из этих дуг короче та, которая лежит внутри меньшего двугранного угла.

Если же полуплоскости R_1 и R_2 образуют продолжение одна другой (т. е. угол между ними равен двум прямым углам), то обе дуги $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\frown}{AB}$ равны по длине. В этом случае на поверхности цилиндра существуют две кратчайшие дуги (одинаковой длины), соединяющие точки A и B (черт. 16).

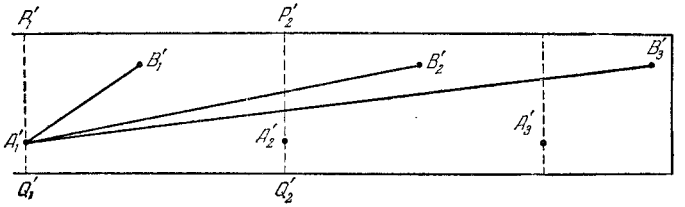


Черт. 17.

Обе рассмотренные нами винтовые дуги $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\frown}{AB}$, соединяющие точки A и B, обладают общим свойством: двигаясь по одной из них из точки A в точку B, мы не совершаем полного оборота вокруг оси цилиндра.

Пусть теперь вокруг цилиндра многократно обернут длинный прямоугольный лист бумаги (ширина его пусть совпадает с высотой цилиндра (черт. 17)). Проткнем этот лист иголкой в точках A и B, затем развернем его в пло-

ский прямоугольник. В нескольких местах листа будут находиться следы прокола точки A; на черт. 18 они обозначены буквами A_1', A_2', A_3', ... Эти следы лежат на одной горизонтальной прямой, параллельной горизонтальным сторонам нашего прямоугольника. Если провести через точки A_1', A_2', A_3', ... прямые $P_1'Q_1'$ и $P_2'Q_2'$, $P_3'Q_3'$, ..., параллельные другой паре сторон прямоугольника, то отделится прямо-



Черт. 18.

угольник $P_1'Q_1'Q_2'P_2'$, дающий один оборот листа вокруг цилиндра; при навертывании листа на цилиндр отрезки $P_1'Q_1'$ и $P_2'Q_2'$ лягут на образующую PQ цилиндра, проходящую через точку A; при этом слившиеся точки A_1', A_2' попадут на точку A цилиндра.

Следами прокола в точке B цилиндра будут точки B_1', B_2', B_3', ... нашего листа. Их расположение совершенно аналогично расположению точек A_1', A_2', A_3', ...

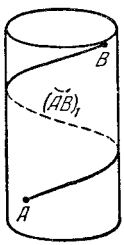
Соединим точку A_1' прямыми линиями с точками B_1', B_2', B_3', ... Навернем снова наш лист на цилиндр так, чтобы точки A_1', A_2', A_3', ... вновь легли на точку A, а точки B_1', B_2', B_3', ... — на точку B цилиндра. Прямолинейный отрезок $A_1'B_1'$ перейдет в дугу $\overset{\smile}{AB}$ винтовой линии (черт. 17), с которой мы уже имели дело выше.

Будем для краткости говорить: «кривая $\overset{\smile}{AB}$ реализует *n целых* положительных (отрицательных) оборотов вокруг оси цилиндра», если, двигаясь по этой кривой на поверхности цилиндра от точки A до точки B, мы совершим более чем n и менее чем $(n+1)$ полных положительных (отрицательных) оборотов вокруг оси цилиндра или точно n целых оборотов.

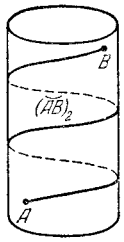
При наворачивании плоскости на цилиндр отрезок $A_1'B_2'$ тоже перейдет в дугу винтовой линии $(\overset{\smile}{AB})_1$, соединяющей

точки A и B (черт. 19); точно так же отрезки $A_1'B_3'$, $A_1'B_4'$, ... перейдут в дуги винтовых линий $(\overset{\smile}{AB})_2$ (черт. 20), $(\overset{\smile}{AB})_3$, ..., соединяющих эти точки. Дуга $(\overset{\smile}{AB})_1$ реализует один целый положительный оборот вокруг оси цилиндра, дуги $(\overset{\smile}{AB})_2$, $(\overset{\smile}{AB})_3$ — соответственно два, три, ... таких целых оборота.

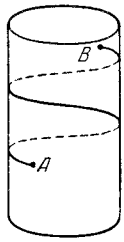
Дуга $(\overset{\smile}{AB})_1$ есть кратчайшая среди дуг, соединяющих точки A и B и реализующих один целый положительный оборот вокруг оси. Аналогично $(\overset{\smile}{AB})_2$, $(\overset{\smile}{AB})_3$ и т. д. суть



Черт. 19.



Черт. 20.



Черт. 21.

кратчайшие из дуг, реализующих соответственно два, три и т. д. таких целых оборота.

Рассмотренные дуги были дугами *правых* винтовых линий. Точно так же можно получить дуги *левых* винтовых линий, соединяющих точки A и B и реализующих один, два, три, ... целых отрицательных оборота вокруг оси цилиндра (черт. 21). Каждая из этих дуг есть кратчайшая из линий, соединяющих точки A и B и реализующих соответственное число целых отрицательных оборотов вокруг оси цилиндра.

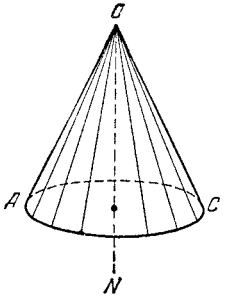
Выясним, как расположится на поверхности цилиндра туго натянутая резиновая нить, закрепленная в точках A и B. Натягиваясь, эта нить расположится по одной из кратчайших линий, т. е. по одной из винтовых линий, соединяющих точки A и B. Если, например, накрутить нить на цилиндр так, что, двигаясь по ней, придется совершать положительное вращение вокруг оси (справа налево), то нить примет положение одной из винтовых линий $\overset{\smile}{AB}$, $(\overset{\smile}{AB})_1$, $(\overset{\smile}{AB})_2$, ... Именно, она примет положение $\overset{\smile}{AB}$, если нить не делает ни одного целого оборота вокруг оси

цилиндра; положение $(\overset{\smile}{AB})_1$, если она делает один целый оборот; положение $(\overset{\smile}{AB})_2$, если она делает два целых оборота, и т. д.

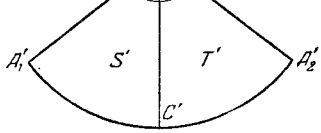
В самом деле, на плоском прямоугольнике нить, натянутая между точкой A_1' и одной из точек B_1', B_2', B_3', ..., расположится по одному из отрезков $A_1'B_1'$, $A_1'B_2'$, $A_1'B_3'$, ... Если навернуть этот лист на поверхность цилиндра так, чтобы A_1' попала в точку A, а точки B_1', B_2', B_3' — в точку B, то натянутая нить примет соответственно форму одной из винтовых дуг $\overset{\smile}{AB}$, $(\overset{\smile}{AB})_1$, $(\overset{\smile}{AB})_2$, ...

§ 3. Кратчайшие линии на конической поверхности

1. Кратчайшая линия на конической поверхности. Пусть из точки O выходят два бесконечных луча OA и ON. Будем вращать луч OA вокруг луча ON. Поверхность, описанная при этом лучом OA, называется *конической поверхностью* (*поверхностью конуса*) (черт. 22), ON называется *осью* конуса. Лучи, выходящие из точки O



Черт. 22.



Черт. 23.

и лежащие на конической поверхности, называются *образующими конуса* [1]).

Если плоскость, проходящая через образующие OA и OC, проходит также через ось конуса, то эти образующие называются *противоположными*. Две противоположные образующие делят конус на две *равные* (*конгруэнтные*) *части*. Разрежем коническую поверхность вдоль образующей OA; после этого коническую поверхность можно развернуть на плоскость. Вершина O конуса перейдет в точку O' плоскости;

[1]) На черт. 22 изображена лишь *часть* бесконечного конуса.

образующие конуса — в лучи на плоскости, выходящие из O'. Вся коническая поверхность перейдет в некоторый угол $A_1'O'A_2'$ плоскости (черт. 23). Величина этого угла называется *развернутым углом конуса*. Она всегда меньше 360°. Стороны угла $O'A_1'$ и $O'A_2'$ образовались из той образующей OA, по которой был произведен разрез конической поверхности. Образующая OC, противоположная образующей OA, перейдет в биссектрису $O'C'$ угла $A_1'O'A_2'$. В самом деле, обе образующие, OA и OC, делят разрезанную по OA коническую поверхность на две равные части S и T. Когда эта поверхность развертывается в плоский угол $A_1'O'A_2'$, то каждая из частей S и T конуса переходит в половины S' и T' этого угла и образующая OC — в биссектрису $O'C'$ этого угла.

Мы развертывали разрезанную коническую поверхность на плоскость. Произведем теперь обратную операцию — свертывание угла $A_1O'A_2'$ в конус. При этом точка O' перейдет в вершину конуса O, а стороны $O'A_1'$ и $O'A_2'$ угла перейдут в одну и ту же образующую.

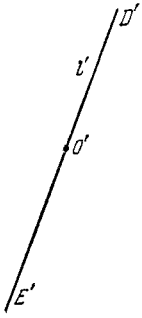
Надрежем плоскость по стороне $O'A_1'$ нашего угла. Будем наворачивать надрезанную плоскость на конус. При этом плоскость, вообще говоря, покроет конус несколько раз. Например, если развернутый угол конуса равен 90°, то плоскость четыре раза покроет коническую поверхность; именно, если провести из точки O' лучи $O'A_2'$, $O'A_3'$, $O'A_4'$ под углами 90, 180 и 270° к $O'A_1'$, то при наворачивании надрезанной плоскости на конус каждый из углов $A_1'O'A_2'$, $A_2'O'A_3'$, $A_3'O'A_4'$, $A_4'O'A_1'$ покроет полностью поверхность конуса. Всего мы будем иметь четырехкратное покрытие конуса надрезанной плоскостью. Лучи $O'A_1'$, $O'A_2'$, $O'A_3'$, $O'A_4'$ плоскости перейдут в одну и ту же образующую конуса.

Если же развернутый угол равен, например, 100°, то надрезанная плоскость трехкратно полностью покроет коническую поверхность и, кроме того, часть конуса покроет в четвертый раз (плоскость состоит из трех прилегающих друг к другу углов в 100° с вершиной в O', каждый из которых покроет один раз всю коническую поверхность, и еще из угла в 60°, который дополнительно покроет часть этой поверхности).

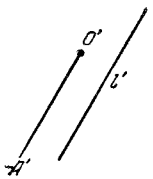
2. Геодезические линии на конической поверхности. Рассмотрим на плоскости произвольную прямую l'. Пусть прямая l' проходит через точку O'. Она состоит, следовательно, из двух лучей $O'D'$ и $O'E'$ (фиг. 24). При

наворачивании плоскости на конус (когда точка O' попадает в вершину O конуса) каждый из лучей $O'D'$ и $O'E'$ переходит в образующую конуса. Наша прямая переходит в две образующие [1]).

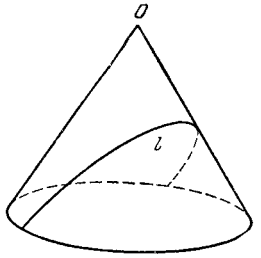
Пусть теперь прямая l' не проходит через точку O' (фиг. 25). Сделаем надрез плоскости по лучу $O'A'$, параллельному l', и навернем надрезанную плоскость на коническую поверхность. При этом прямая l' перейдет в некоторую кривую l на конической поверхности (фиг. 26). Эта кривая l называется *геодезической линией* на поверхности конуса. Каждый отрезок прямой l' перейдет в дугу кривой l. Наоборот, всякая



Черт. 24.



Черт. 25.



Черт. 26.

дуга кривой l при развертывании конической поверхности на плоскость перейдет в отрезок прямой l'.

Получаемые кривые на поверхности конуса играют роль, аналогичную винтовым линиям на поверхности цилиндра.

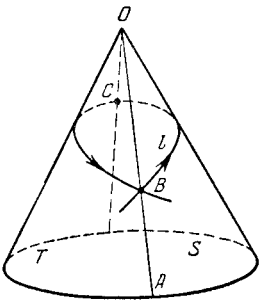
Соединим точки A и B конической поверхности всевозможными линиями, лежащими на поверхности, и пусть одна из них, дуга $\overset{\smile}{AB}$, имеет наименьшую длину. При развертывании конической поверхности на плоскость дуга $\overset{\smile}{AB}$ перейдет в плоскую дугу $A'B'$; поскольку дуга $\overset{\smile}{AB}$ есть кратчайшая среди линий, лежащих на конической поверхности и соединяющих A и B, то $A'B'$ есть кратчайшая среди линий на плоскости, соединяющих A' и B'. Значит, $A'B'$ есть прямолинейный отрезок. Дуга $\overset{\smile}{AB}$, которая при развер-

[1]) Две образующие могут слиться в одну. Это случится, если численное значение развернутого угла конуса, выраженное в градусах, есть делитель числа 180, т. е. если этот угол равен 180°, 90°, 60°, ..., вообще $\frac{180°}{k}$, где k — целое число.

тывании конической поверхности на плоскость переходит в прямолинейный отрезок, есть дуга геодезической.

Мы увидим сейчас, что форма геодезической существенным образом зависит от развернутого угла конуса.

3. Двойные точки геодезических линий. Введем предварительно следующее определение. Пусть, двигаясь вдоль некоторой линии q, мы дважды пройдем через одну и ту же точку A. Точка A называется *двойной точкой* линии q [1]). На черт. 27 точка B есть двойная точка линии l: двигаясь по линии l по направлениям, указанным стрелками, мы дважды пройдем через точку B.

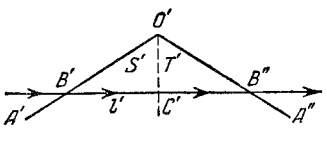


Черт. 27.

Теорема 1. *Если развернутый угол конуса больше или равен* 180°, *то геодезические на нем не имеют двойных точек. Если же развернутый угол конуса меньше* 180°, *то всякая геодезическая имеет хотя бы одну двойную точку.*

Рассмотрим на плоскости точку O' и прямую l', не проходящую через O' (черт. 28). Если навернуть плоскость на конус так, чтобы O' попала в вершину конуса O, то прямая l' перейдет в геодезическую l.

Пусть C' — основание перпендикуляра, опущенного из O' на l'. При наворачивании плоскости на конус луч $O'C'$ перейдет в образующую OC конуса. Точку C иногда называют *вершиной* геодезической на конической поверхности. Обозначим через OA противоположную образующую конуса; OA и OC делят поверхность конуса на две равные части S и T. Надрежем коническую поверхность по образующей OA и развернем ее на плоскость так, чтобы вершина O конуса перешла снова в точку O', а образующая OC — в луч $O'C'$. При этом геодезическая l снова развернется в прямую l'. Вся коническая поверхность перейдет в угол $A'O'A''$. Обе половины ее, S и T, перейдут в половины S' и T' этого угла; прямая $O'C'$ есть биссектриса этого угла.



Черт. 28.

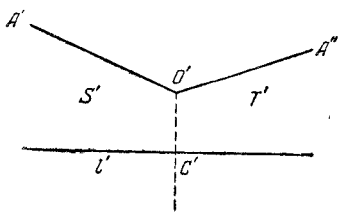
[1]) Иногда двойные точки называются *узлами*.

Рассмотрим два случая.

1) Угол $A'O'A''$ (развернутый угол конуса) больше или равен 180° (черт. 29). Прямая l' лежит целиком внутри этого угла. Если снова навернуть угол на коническую поверхность так, что обе стороны угла $O'A'$ и $O'A''$ совпадут с образующей OA, то прямая l' перейдет снова в геодезическую l на поверхности конуса; разные точки прямой l' перейдут в разные точки конуса; следовательно, в этом случае l не имеет двойных точек.

2) Угол $A'O'A''$ меньше 180°. Прямая l', перпендикулярная к биссектрисе $O'C'$, пересекает стороны угла в точках, которые мы обозначим через B' и B'' (черт. 28).

Треугольник $B'O'B''$ равнобедренный, так как его высота $O'C'$ совпадает с биссектрисой. Навернем угол $A'O'A''$ снова на поверхность конуса так, чтобы O' перешла в вершину конуса, а обе стороны $O'A'$, $O'A''$ угла — в образующую OA. Точки B' и B'' вследствие равенства отрезков $O'B'$ и $O'B''$ попадут в одну точку B этой образующей (черт. 27). Прямая l' перейдет в геодезическую l, отрезок $B'C'$ прямой l',



Черт. 29.

лежащей в половине S' угла $B'O'B''$, перейдет в дугу $\overset{\frown}{BC}$ линии l, соединяющую точки B и C и лежащую в половине S конической поверхности; аналогично отрезок $B''C'$, лежащий в половине T' угла $B'O'B''$, перейдет в дугу $\overset{\frown}{BC}$ линии l, соединяющую точки B и C и лежащую в половине T конической поверхности. Точка B — двойная точка кривой l. Отрезок $B'B''$ прямой l' перейдет в дугу BCB, имеющую форму петли с совпадающими концами.

Выясним, сколько двойных точек имеет геодезическая? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, уточняющая предыдущую теорему.

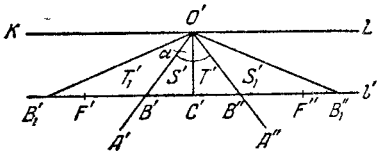
Теорема 2. *Пусть развернутый угол конуса равен* α (α — *мера угла в градусах*), *тогда*

1) *Если* 180° *не делятся нацело на* α, *то число двойных точек геодезической равно целой части дроби* $\frac{180}{\alpha}$.

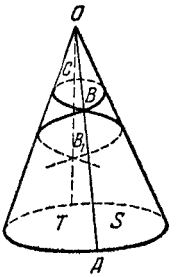
2) *Если* 180° *делится нацело на* α, *то число двойных точек равно* $\frac{180}{\alpha} - 1$.

Если $\alpha > 180$, то целая часть дроби $\frac{180}{\alpha}$ равна нулю, если $\alpha = 180$, то $\frac{180}{\alpha} - 1 = 0$. Следовательно, по нашей теореме в этих случаях число двойных точек должно равняться нулю; это есть перефразировка первой части предыдущей теоремы.

Остается рассмотреть случай $\alpha < 180$. Сохраним обозначения предыдущей теоремы. Угол $A'O'A''$ (черт. 30) есть развернутый угол конуса. Проведем через точку O' перпендикуляр $O'C'$ к прямой l' и прямую KL, параллельную прямой l'. KL делит плоскость на две полуплоскости. Мы будем рассматривать только ту полуплоскость, в которой лежит прямая l'. Проведем из точки O' в этой полуплоскости лучи, образующие с лучом $O'C'$ углы, кратные $\frac{\alpha}{2}$. Это будут лучи $O'B'$,



Черт. 30.



Черт. 31.

$O'B''$, $O'B_1'$, $O'B_1''$, ..., пересекающие прямую l' в точках B', B'', B_1', B_1''... Заметим, что $O'B' = O'B''$, $O'B_1' = O'B_1''$, ... Будем теперь навертывать нашу полуплоскость на конус так, чтобы точка O' попала в вершину конуса O, а луч $O'C'$ пошел по образующей OC (черт. 31). Углы нашей полуплоскости, равные $\frac{\alpha}{2}$, заключенные между соседними лучами $O'B_1'$, $O'B'$, $O'C'$, $O'B''$, $O'B_1''$, ..., покроют при этом несколько раз обе половины конической поверхности S и T. Именно, угол S' ляжет на половину S конуса; смежные с ним углы T_1' и T' — на другую половину T конуса, и т. д. Поскольку луч $O'C'$ пойдет по образующей OC, то лучи $O'B'$, $O'B''$ пойдут по противоположной образующей OA, лучи $O'B_1'$, $O'B_1''$ — снова по OC, и т. д.

Так как отрезки $O'B' = O'B''$, $O'B_1' = O'B_1''$, то пары точек B' и B'', B_1' и B_1'', ..., попав на одну образующую, попарно совпадут: точка B' совпадет с B'' и попадет в B образующей OA; B_1' и B_1'' попадут в точку B_1 образующей OC, и т. д. Следовательно, точки B, B_1, ... суть двойные точки l, в кото-

рую перешла прямая l_1 при наворачивании полуплоскости на конус. Число этих точек равно числу лучей $O'B'$, $O'B'_1$, ... внутри прямого угла $KO'C'$. Так как эти лучи образуют с $O'C'$ углы, кратные $\frac{\alpha}{2}$, притом меньшие 90°, то их число равно числу чисел, кратных $\frac{\alpha}{2}$ и меньших 90 (т. е. кратных α и меньших 180). Иначе говоря, если 180 не делится нацело на α, то число этих лучей равно целой части дроби $\frac{180}{\alpha}$. Если же 180 делится на α, то их число равно $\frac{180}{\alpha} - 1$.

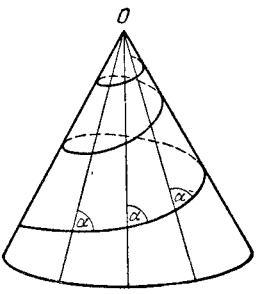
Для полного доказательства теоремы осталось показать, что все двойные точки геодезической суть как раз те, которые получаются от слияния точек B'_i и B''_i прямой l'.

В самом деле, двойная точка геодезической l получается, если две точки нашей прямой l' при наворачивании полуплоскости на конус перейдут в одну и ту же точку конуса. Для этого необходимо, чтобы обе точки были одинаково удалены от O' и лежали на l'. Значит, эти две точки должны располагаться на l' симметрично относительно C'. Пусть одна из них, назовем ее F' (см. черт. 30), лежит слева от C', а другая F'' — справа. Если точка F' не совпадет ни с одной из точек B', B'', B'_1, B''_1, ... , то она должна лежать внутри одного из углов $C'O'B'$, $C'O'B''$, $B'O'B'_1$, $B''O'B''_1$, ... , отмеченных на черт. 30 соответственно буквами S'_i и T'_i. Если точка F' лежит внутри угла S'_i, то симметричная ей точка F'' лежит внутри угла T'_i, т. е. при наворачивании полуплоскости на конус точка F' перейдет в точку, расположенную внутри полуконуса S, а точка F'' — в точку, лежащую внутри полуконуса T; наоборот, если точка F' перейдет в точку, лежащую внутри полуконуса T, то точка F'' перейдет в точку, лежащую внутри полуконуса S. В обоих случаях F' и F'' перейдут в разные точки конуса. Следовательно, новых двойных точек, кроме полученных от слияния пар B' и B'', B'_1, и B''_1, ... , на геодезической l нет. Теорема доказана.

Обратим внимание на полосу, расположенную между параллельными прямыми KL и l'. Мы предлагаем читателю самому рассмотреть, каким образом наложится эта полоса на коническую поверхность при разных значениях развернутого угла α конуса (при $\alpha > 180°$; $\alpha = 180°$; $180° > \alpha > 90°$; $\alpha = 90°$; $90° > \alpha > 60°$; и т. д.).

Повторяя рассуждения конца предыдущего параграфа, мы убедимся, что натянутая упругая нить ляжет на поверхности конуса по геодезической линии.

Примечание. На поверхности конуса также можно рассматривать *винтовые линии*, т. е. линии, пересекающие все образующие конуса под равными углами α (черт. 32). При $\alpha = 0$ и $\alpha = 90°$ винтовые линии на конусе вырождаются соответственно в образующие и круговые сечения. При $\alpha \neq 0$ винтовые линии на конусе не являются геодезическими. В этом их отличие от винтовых линий на поверхности цилиндра.

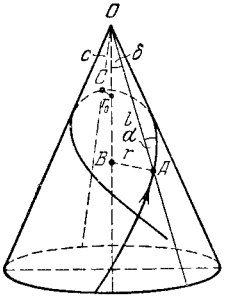


Черт. 32.

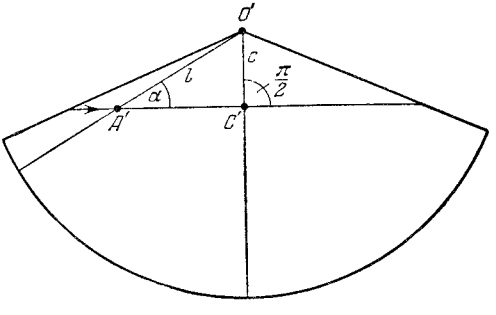
4. Теорема Клеро для случая геодезических на конусе. Пусть C — вершина геодезической s на поверхности конуса, отстоящая от вершины конуса на отрезок $OC = c$, а от оси конуса — на расстояние r_0 (черт. 33). Тогда геодезическая в точке C перпендикулярна к образующей OC. Далее, пусть A — *произвольная* точка геодезической, r — расстояние точки A от оси конуса, α — угол между геодезической s и образующей OA, l — длина отрезка OA. Имеет место соотношение

$$l \sin \alpha = c. \tag{1}$$

Для доказательства формулы (1) развернем на плоскость поверхность конуса (черт. 34). При этом OC и OA перейдут



Черт. 33.



Черт. 34.

в $O'C'$ и $O'A'$ (длины c и l при этом сохраняются), дуга $\overset{\frown}{AC}$ геодезической s перейдет в отрезок $A'C'$ прямой, при этом $O'C'$ будет перпендикулярен к прямой $A'C'$; угол при

вершине A' в треугольнике $A'O'C'$ равен α. Из треугольника $A'O'C'$ получим:

$$l \sin \alpha = c,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что если δ есть угол между образующей конуса и его осью (см. черт. 33), то $r = l \sin \delta$. Умножая обе части равенства (1) на $\sin \delta$, получим:

$$l \sin \delta \cdot \sin \alpha = c \sin \delta$$

или

$$r \sin \alpha = c_1, \tag{2}$$

где $c_1 = c \sin \delta$ — постоянная величина для геодезической.

Последнее равенство доказывает следующее предложение.

Теорема 3. *Для всех точек A геодезической s на конической поверхности выражение $r \sin \alpha$, где r — расстояние точки A от оси конуса, α — угол между образующей OA и геодезической s, есть величина постоянная*:

$$r \sin \alpha = \text{const}. \tag{3}$$

Эта теорема является частным случаем теоремы Клеро (см. § 10).

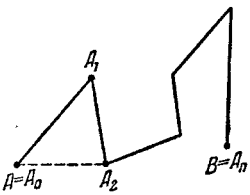
Цилиндр можно рассматривать как предельный случай конуса (когда вершина конуса уходит в бесконечность). Геодезической на конусе отвечает винтовая линия на цилиндре. Формула (3), очевидно, остается справедливой и для цилиндра: расстояние r всех точек цилиндра от оси одинаково, угол α между винтовой линией и образующими цилиндра также одинаков для всех точек винтовой линии.

§ 4. Кратчайшие линии на поверхности шара

1. Длина линии. При исследовании кратчайших линий на поверхности цилиндра и конуса мы пользовались тем обстоятельством, что цилиндрическую и коническую поверхности можно развернуть на часть плоскости. Но этот способ не годится при исследовании кратчайших линий на поверхности шара, которую нельзя развернуть на часть плоскости.

Мы вспомним сейчас, как устанавливается в элементарной геометрии свойство отрезка прямой давать наименьшую длину среди всех линий, имеющих те же концы. Это свой-

ство вытекает из теоремы о том, что одна сторона треугольника меньше суммы двух других. Именно, на основании этой теоремы доказывается, что отрезок прямой AB короче всякой ломаной $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$, имеющей те же концы $A_0 = A$ и $A_n = B$ (черт. 35). В самом деле, мы только укоротим ломаную, если два ее смежных звена A_0A_1 и A_1A_2 заменим отрезком A_0A_2 (ибо сторона A_0A_2 треугольника $A_0A_1A_2$ короче суммы сторон A_0A_1 и A_1A_2) [1]). При этом мы заменяем ломаную $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ ломаной $A_0A_2 \ldots A_{n-1}A_n$, имеющей одной стороной меньше. Аналогично в этой ломаной два смежных звена A_0A_2 и A_2A_3 можно заменить одной стороной A_0A_3, отчего длина ломаной не увеличится. Мы придем к ломаной $A_0A_3 \ldots A_{n-1}A_n$, у которой число звеньев меньше еще на одно звено. Так мы можем последовательно уменьшать число звеньев ломаной, пока не сведем ее к единственному звену — отрезку $A_0A_n = AB$. При этом при каждом переходе от одной ломаной к другой ее длина могла только уменьшаться (иногда эта длина оставалась без изменения; оставаться без изменения при каждом переходе она не могла, так как это возможно лишь в случае, если все точки A_0, A_1, ..., A_n расположены на одной прямой AB, что у нас исключено). Отсюда и вытекает, что исходная ломаная была длиннее отрезка AB. В элементарной геометрии доказывают только, что отрезок AB прямой короче всякой ломаной, соединяющей те же точки A и B.



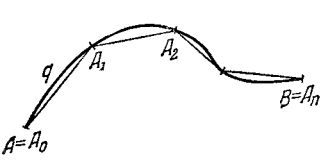
Черт. 35.

Чтобы вывести аналогичное утверждение для произвольной линии, соединяющей точки A и B, нужно прежде всего точно определить длину кривой. В элементарной геометрии определяется длина окружности как предел длин вписанных многоугольников, когда число сторон многоугольника стремится к бесконечности, а длина наибольшей стороны стремится к нулю.

Аналогично можно определить и длину произвольной линии. Пусть дана линия q, соединяющая точки A и B

[1]) Если точки A_0, A_1, A_2 лежат на одной прямой, то сумма длин двух звеньев A_0A_1 и A_1A_2 равна длине звена A_0A_2. Так что, заменяя два звена A_0A_1 и A_1A_2 одним звеном A_0A_2, мы длину ломаной не увеличим. Это замечание относится и к дальнейшему рассмотрению

(черт. 36). Будем двигаться по этой линии по направлению от A к B и отметим последовательно $(n+1)$ точек: $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., $A_n = B$. Соединим эти точки последовательно отрезками. Получим ломаную $A_0A_1A_2 \ldots A_n$, которую будем называть *ломаной, вписанной в нашу кривую*. Будем теперь строить вписанные в кривую q ломаные с *неограниченно растущим числом сторон*. При этом будем строить эти ломаные так, чтобы при неограниченном росте числа сторон *длина наибольшей стороны стремилась к нулю*. Можно показать, что *длины вписанных многоугольников стремятся при этих условиях к пределу, который и принимается за длину линии*.



Черт. 36.

Поскольку отрезок AB короче длины любой ломаной, соединяющей точки A и B, а длины кривых, соединяющих эти точки, суть пределы длин ломаных, их соединяющих, то отсюда выводят, что отрезок прямой является кратчайшей линией и среди всех кривых, соединяющих A и B.

2. Кратчайшие линии на поверхности шара. Перейдем теперь к отысканию кратчайших линий на поверхности шара. Заметим, что через две точки A и B на поверхности шара, если они не лежат на противоположных концах одного и того же диаметра, можно провести единственный большой круг шара. Через две точки, лежащие на концах одного и того же диаметра, можно провести бесчисленное множество больших кругов. Последний случай мы пока будем исключать без специальных оговорок: говоря о двух точках на шаровой поверхности, мы будем молча предполагать, что эти две точки не лежат на одном диаметре шара.

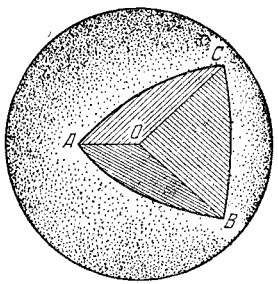
Проведем большой круг, проходящий через данные две точки A и B шаровой поверхности. Точки A и B (поскольку они не лежат на концах одного и того же диаметра) делят большой круг на две неравные дуги. Мы будем обозначать через $\overset{\smile}{AB}$ *меньшую* из этих дуг.

Пусть нам даны три точки шаровой поверхности: A, B, C, соединенные дугами больших кругов $\overset{\smile}{AB}$, $\overset{\smile}{BC}$, $\overset{\smile}{CA}$. Эти три дуги образуют так называемый *сферический треугольник* ABC; дуги $\overset{\smile}{AB}$, $\overset{\smile}{BC}$, $\overset{\smile}{CA}$ называются его *сторонами*.

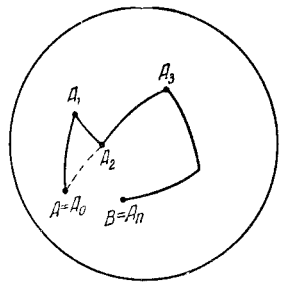
Оказывается, что для сферических треугольников имеет место теорема, аналогичная основной теореме о длинах сторон обычного (плоского) треугольника.

Теорема. *Каждая сторона сферического треугольника меньше суммы двух других сторон.*

Рассмотрим сферический треугольник ABC на поверхности шара с центром в точке O (черт. 37). Сторона $\overset{\smile}{AB}$ этого треугольника есть дуга большого круга, т. е. круга с центром в O; в плоскости этого круга дуге AB отвечает



Черт. 37.



Черт. 38.

центральный угол AOB. Аналогично в плоскостях, в которых лежат стороны $\overset{\smile}{BC}$ и $\overset{\smile}{CA}$, им отвечают центральные углы BOC и COA. Длины сторон $\overset{\smile}{AB}$, $\overset{\smile}{BC}$, $\overset{\smile}{CA}$ как дуги больших кругов, имеющих равные радиусы, пропорциональны центральным углам AOB, BOC, COA.

Три плоскости наших больших кругов образуют трехгранный угол с вершиной в точке O и с плоскими углами AOB, BOC, COA. Длины сторон нашего сферического треугольника пропорциональны соответственным плоским углам нашего трехгранного угла. А так как в трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов, то аналогичное неравенство имеет место и для пропорциональных им сторон сферического треугольника. Это доказывает нашу теорему.

Дана последовательность точек A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n на сфере, соединенных дугами больших кругов A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Совокупность этих дуг называется *сферической ломаной*, соединяющей точки A_0 и A_n (черт. 38).

Для плоскости из того, что сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, следовала теорема, что

отрезок AB прямой короче ломаной, соединяющей те же точки A и B. Для шаровой поверхности аналогично из того, что одна сторона сферического треугольника меньше суммы двух других, следует, что дуга $\overset{\smile}{AB}$ большого круга меньше всякой ломаной, соединяющей те же точки. Далее, для шаровой поверхности, как и для плоскости, длины кривых, соединяющих точки A и B, получаются как пределы длин сферических ломаных, соединяющих эти точки. Поскольку дуга $\overset{\smile}{AB}$ большого круга короче всех сферических ломаных, соединяющих A и B, то она короче и всех кривых, соединяющих эти точки.

Доказательство того, что дуга $\overset{\smile}{AB}$ короче любой ломаной, соединяющей точки A и B, в основном повторяет доказательство аналогичной теоремы для ломаной, расположенной на плоскости. Пусть дана дуга $\overset{\smile}{AB}$ и ломаная $A_0A_1A_2A_3 \ldots A_n$, где $A_0 = A$, $A_n = B$.

В сферическом треугольнике $A_0A_1A_2$ сторона $\overset{\smile}{A_0A_2}$ меньше суммы сторон $\overset{\smile}{A_0A_1}$ и $\overset{\smile}{A_1A_2}$ [1]). Заменим два звена $\overset{\smile}{A_0A_1}$ и $\overset{\smile}{A_1A_2}$ дугой $\overset{\smile}{A_0A_2}$. Получим новую линию $A_0A_2A_3 \ldots A_n$, может быть, более короткую, чем первоначальная, и содержащую на одно звено меньше. Далее заменим две стороны $\overset{\smile}{A_0A_2}$ и $\overset{\smile}{A_2A_3}$ одной стороной $\overset{\smile}{A_0A_3}$; от этого длина ломаной может лишь уменьшиться или остаться без изменения. Аналогичные преобразования (замена двух соседних звеньев ломаной одним) будем продолжать и дальше. При каждом уменьшении числа сторон длина ломаной может лишь уменьшиться или остаться без изменения. Тогда мы будем получать все новые ломаные, соединяющие A и B, все с меньшим числом сторон и, наконец, придем к ломаной из одного звена, т. е. к самой дуге $\overset{\smile}{AB}$. При этом процессе длина ломаной всякий раз или

---

[1]) Если точки A_0, A_1 и A_2 лежат на одном большом круге, то сторона $\overset{\smile}{A_0A_2}$ или равна сумме сторон $\overset{\smile}{A_0A_1}$ и $\overset{\smile}{A_1A_2}$, если эта сумма меньше полуокружности, или меньше ее, если эта сумма больше полуокружности. Так что всегда при замене двух сторон $\overset{\smile}{A_0A_1}$ и $\overset{\smile}{A_1A_2}$ одной $\overset{\smile}{A_0A_2}$ длина ломаной может лишь уменьшиться или остаться без изменения. Это замечание относится и к дальнейшему рассмотрению.

убывала или иногда оставалась без изменения. Но длина ломаной оставаться без изменения при каждом шаге не может, так как это означало бы, что точки A_0, A_1, ..., A_n лежат на одном большом круге на дуге $\overset{\smile}{AB}$, что у нас исключается. Поэтому *длина исходной ломаной* $A_0A_1 \ldots A_n$ *больше длины* $\overset{\smile}{AB}$.

Рассмотрим теперь случай, когда точки A и B лежат на концах одного и того же диаметра шара. В этом случае имеется бесчисленное множество дуг больших кругов, соединяющих A и B и имеющих AB в качестве диаметра. Все они имеют равную длину. С другой стороны, всякая другая кривая q, соединяющая те же точки A и B, имеет длину, бóльшую длины полуокружности большого круга. В самом деле, пусть точка C (отличная от A и B) лежит на q и разбивает эту линию на две линии (AC) и (CB). Проведем полуокружность большого круга $\overset{\smile}{ACB}$; она состоит из двух дуг $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{CB}$. Каждая из этих дуг короче любой другой кривой на поверхности шара, соединяющей те же точки A и B. Так как наша кривая q не есть полуокружность, то по крайней мере одна из ее частей (AC) или (CB) не совпадает с соответствующей дугой $\overset{\smile}{AC}$ или $\overset{\smile}{CB}$. Пусть, например, (AC) не совпадает с $\overset{\smile}{AC}$. Тогда длина (AC) больше длины $\overset{\smile}{AC}$. Далее, длина (CB) или больше длины $\overset{\smile}{CB}$ (если они не совпадают) или равна ей (если (CB) совпадает с $\overset{\smile}{CB}$). Отсюда следует, что общая длина q больше длины $\overset{\smile}{ACB}$.

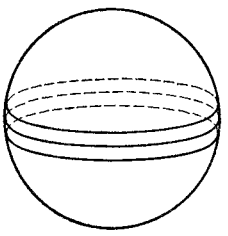
Для двух диаметрально противоположных точек A и B существует бесчисленное множество кратчайших кривых, соединяющих эти точки; именно этими кривыми являются все полуокружности больших кругов, соединяющие A и B.

3. Дополнительное замечание. Поверхность шара нельзя развернуть на часть плоскости, не деформируя ее, т. е. не изменяя длины расположенных на ней линий. Однако очень узкую полоску, расположенную на поверхности шара вдоль некоторой линии q, можно развернуть на плоскость, допуская лишь ничтожно малые искажения длин линий, лежащих на полоске. Притом, чем у́же полоска, взятая на шаре, тем меньше эти искажения, тем с большей точностью можно развернуть эту полоску на плоскость. Выражаясь языком теории пределов, искажение длины линий на

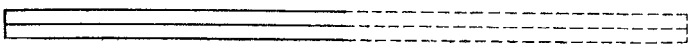
полоске есть величина высшего порядка малости по сравнению с шириной полоски.

Если узкая полоска, лежащая на поверхности шара, развернута на плоскость, то дуга большого круга, заключенная в этой полоске, переходит в прямолинейный отрезок (и обратно).

В самом деле, дуга $\overset{\smile}{AB}$ большого круга на шаровой полоске есть кратчайшая среди других дуг, лежащих на полоске и соединяющих A и B. Если при развертывании полоски на плоскость точки A и B перейдут в A' и B', то дуга $\overset{\smile}{AB}$ перейдет в дугу, соединяющую на плоскости A' и B', притом более короткую, чем соседние плоские дуги, соединяющие эти же точки; следовательно, $\overset{\smile}{AB}$ перейдет в отрезок $A'B'$.

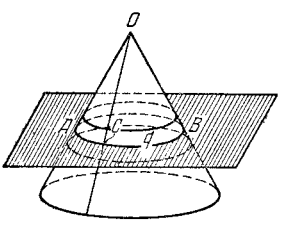


Следствие. Вырежем на шаровой поверхности узкую полоску вокруг боль-

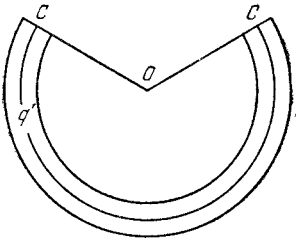


Черт. 39.

шого круга и, разрезав, развернем ее на плоскость. Эта полоска перейдет в плоскую прямую полоску; в среднюю линию полоски перейдет большой круг. Обратно, если узкую плоскую прямую полоску (ленту) навернуть на поверхность шара, то она ляжет на эту поверхность по большому кругу (черт. 39).



Черт. 40.



Черт. 41.

Посмотрим теперь, во что перейдет узкая полоска, содержащая дугу малого круга q (т. е. окружности на поверхности шара, отличной от большого круга).

Отметим предварительно следующее обстоятельство. Рассечем коническую поверхность плоскостью, перпендикулярной к оси конуса. Эта плоскость пересечет коническую поверхность по окружности q. Отрезки образующих от вершины O конуса до окружности q равны (например, на черт. 40 $OA = OB = OC$). Если разрезать коническую поверхность по образующей OC и развернуть эту поверхность на плоскость, то окружность q перейдет в дугу окруж-

ности q' радиуса, равного OC. Узкая полоска на поверхности конуса, имеющая своей средней линией окружность q, развернется на плоскости в полоску, имеющую средней линией дугу q' (черт. 41).

Вернемся к шаровой поверхности (черт. 42). Проведем диаметр AB через центр O_1 малого круга p_1 и центр O шара; проведем большой круг p с диаметром AB, пересекающий малый круг p_1 в точке C. Пусть r — радиус p_1, R — радиус шара, α — угол O_1CO. Имеем

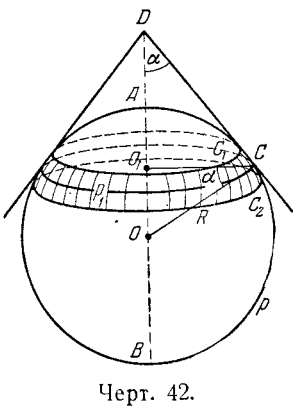
$$\cos\alpha = \frac{r}{R}.$$

Проведем касательную CD к p в точке C до пересечения в точке D с продолжением диаметра AB. Имеем: $\angle CDO = \angle O_1CO = \alpha$ (вследствие перпендикулярности сторон этих углов). Из треугольника OCD имеем:

$$CD = R\operatorname{ctg}\alpha = R\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} =$$

$$= R\left[\frac{r}{R} : \sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right] = \frac{rR}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Будем вращать чертеж вокруг оси AB. Прямая CD при этом образует коническую поверхность; окружность p опишет шар радиуса R. Эти коническая и шаровая поверхности касаются по окружности p_1.



Черт. 42.

Маленькую дугу C_1C_2 круга p, содержащую точку C, можно считать совпадающей с маленьким отрезком касательной [1]). При вращении этой дуги вокруг AB она опишет шаровую полоску, содержащую малый круг p_1. Эту полоску можно считать совпадающей с полоской на конусе [2]), касающемся нашего шара вдоль окружности p_1 (эта полоска на конической поверхности образована вращением отрезка касательной, с которым мы считаем совпадающей дугу C_1C_2). Если надрезать эту полоску по C_1C_2 и развернуть на плоскость, то окружность p_1 перейдет в дугу окружности радиуса, равного CD, т. е. радиуса

$$l = \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}},$$

[1]) Совпадающей, если пренебречь величинами высшего порядка малости сравнительно с длиной C_1C_2.

[2]) Совпадающей в том же смысле.

а узкая полоска на шаровой поверхности, имеющая своей средней линией окружность p_1, развернется в плоскую полоску, окружающую дугу окружности радиуса l.

Обратно, будем наворачивать на поверхность шара радиуса R узкую плоскую полоску, имеющую средней линией дугу окружности радиуса l. Она ляжет на шаровую поверхность вдоль малого круга. Радиус этого круга определится из уравнения

$$l = \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

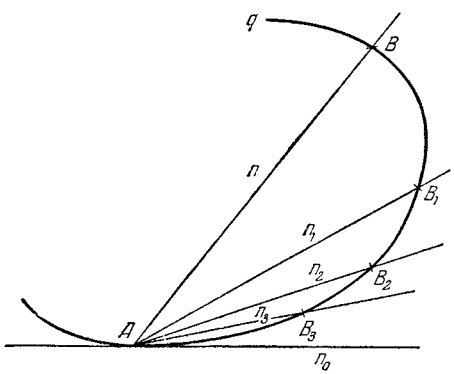
Нетрудно найти, что

$$r = \frac{Rl}{\sqrt{R^2 + l^2}}.$$

ГЛАВА II. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ И ОТНОСЯЩИЕСЯ К НИМ ЗАДАЧИ

§ 5. Касательная и нормали к плоским кривым и связанные с ними задачи

1. Касательная к кривой. Пусть дана некоторая кривая q на плоскости или в пространстве и на ней точка A (черт. 43). Рассмотрим другую точку B на той же кривой.



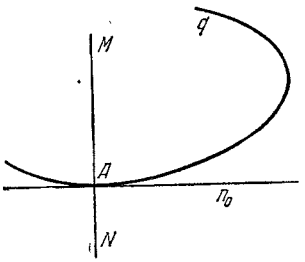
Черт. 43.

Соединим точки A и B прямой n. Эта прямая называется секущей. Будем приближать точку B к точке A, двигая ее по кривой q; при этом секущая n будет вращаться вокруг точки A. Именно в то время как точка B будет занимать

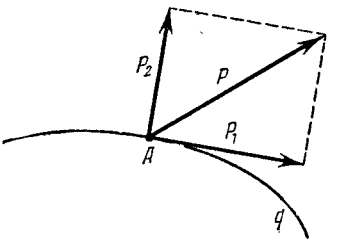
положения точек B_1, B_2, B_3, ... , секущая n будет занимать положения прямых AB_1, AB_2, AB_3, ... Когда точка B стремится к точке A, секущая n стремится к предельному положению — к некоторой прямой n_0. Это *предельное положение секущей* — прямая n_0 — называется *касательной к кривой q в точке A*.

Представим себе, что по кривой q движется материальная точка, которая срывается с кривой в точке A. Сорвавшись, она по инерции начнет двигаться по касательной n_0 к нашей кривой в точке A.

2. Нормаль. Теперь предположим, что кривая q расположена в некоторой плоскости (такую кривую будем называть плоской кривой). *Нормалью* к кривой q в точке A



Черт. 44.



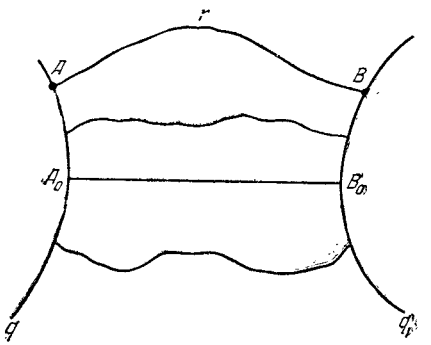
Черт. 45.

будем называть прямую MN, проходящую через точку A и перпендикулярную к касательной n_0 к кривой q в этой точке (черт. 44).

3. Кратчайшее расстояние между двумя кривыми. Рассмотрим точку A, способную перемещаться только по кривой q; пусть P — равнодействующая сил, действующих на точку A (черт. 45). Разложим силу P на две компоненты — *касательную* компоненту P_1 (направленную по касательной к кривой q в точке A) и *нормальную* компоненту P_2 (направленную по нормали к кривой q в точке A). Касательная компонента смещает точку A по кривой q. *Точка A находится поэтому в равновесии, если касательная компонента P_1 отсутствует, т. е. если P совпадает с P_2, и, значит, сила P направлена по нормали к кривой q в точке A.*

Рассмотрим две кривые q и q_1; будем искать кратчайшую из линий r, один конец A которых находится на кривой q, а другой B — на кривой q_1 (черт. 46). Будем считать линии

q и q_1 неподвижными и жесткими; будем рассматривать упругую нить r, один конец A которой скользит по кривой q, другой конец B — по q_1 (можно себе представить, например, что в точке A имеется маленькое колечко, в которое продета кривая q, в точке B — другое колечко, в которое продета q_1, к этим колечкам прикреплены концы нити). Нить r стремится принять положение, при котором длина ее наименьшая. Пусть A_0B_0 — такое положение нити, в этом положении нить находится в равновесии. Очевидно, A_0B_0 есть прямолинейный отрезок, соединяющий точки A_0 на q и B_0 на q_1 (если бы эта линия не была прямолинейным отрезком,



Черт. 46.

то, сохранив положения ее концов, можно было бы эту линию укоротить). Так как нить в положении A_0B_0 находится в равновесии, то ее конец A_0 находится в равновесии. На точку A_0 действует сила натяжения, направленная по отрезку A_0B_0. В силу выведенного выше условия равновесия точки на кривой отрезок A_0B_0 есть нормаль к кривой q в точке A_0. Аналогично показывается, что этот отрезок есть нормаль к кривой q_1 в точке B_0.

Итак, *кратчайшая из линий, соединяющих точки двух кривых, есть общая нормаль к этим кривым.*

Точно так же, *кратчайшая из линий, соединяющих точку A с кривой q, есть нормаль к кривой q, проведенная из точки A.*

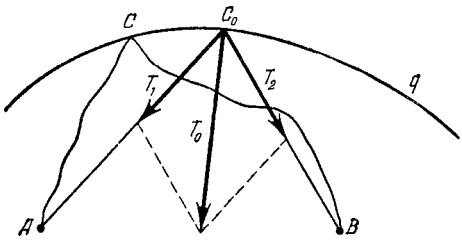
4. Задача об отражении. Пусть q — фиксированная кривая. Будем рассматривать всевозможные кривые ACB, соединяющие две заданные точки A и B и имеющие общую

точку C с кривой q, или, как говорят, кривые соединяют точки A и B, отражаясь о кривую q.

Рассмотрим нить $\overset{\frown}{ACB}$, закрепленную в концах A и B, у которой точка C смещается по кривой q (черт. 47).

Пусть AC_0B есть кратчайшая из линий, соединяющих точки A и B, отражаясь о кривую q (C_0 — точка кривой q). Нить в положении AC_0B находится в состоянии равновесия.

Очевидно, обе части AC_0 и C_0B кратчайшей кривой суть прямолинейные отрезки. Точка C_0 нити на кривой находится в равновесии; на эту точку действуют силы натяжения, равные по величине [1]): сила T_1, направленная по отрезку C_0A, сила T_2 — по отрезку C_0B, их равнодействующая T_0 напра-



Черт. 47.

влена по биссектрисе угла AC_0B. В силу условия равновесия T_0 направлена по нормали к кривой q в точке C_0. Значит, биссектриса угла AC_0B есть нормаль к кривой q в точке C_0.

Кратчайшая из кривых линий, которые соединяют точки A и B, отражаясь о кривую q, есть ломаная AC_0B с вершиной C_0 на кривой q, в которой нормаль к этой кривой совпадает с биссектрисой угла AC_0B.

5. Кратчайшие расстояния в области. Будем рассматривать области на плоскости, ограниченные некоторыми линиями. Области могут быть конечными (область *I* на черт. 48) или бесконечными (например область *II* на этом же чертеже, получаемая выкидыванием из плоскости области *I*).

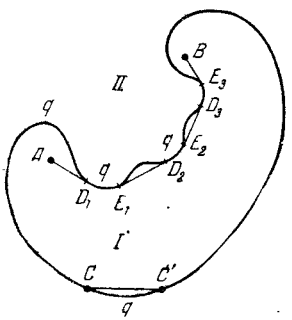
Будем искать кратчайшую из линий, соединяющих в области *I* две ее точки A и B этой области. Эта линия

[1]) Сила натяжения во всех точках нити одинакова.

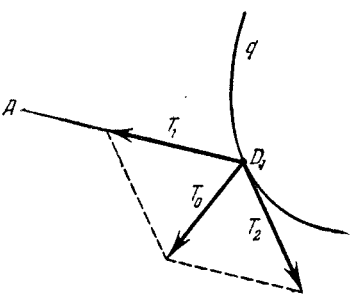
$\overset{\frown}{AB}$ есть положение равновесия гибкой нити, находящейся в I, закрепленной в точках A и B, причем границу области будем считать огороженной. Нить может содержать части границы q области I.

Пусть $s_0 = AD_1E_1D_2E_2 \ldots D_nE_nB$ есть кратчайшая из линий s. Она состоит из частей $\overset{\frown}{E_1D_1}$, $\overset{\frown}{E_2D_2}$, $\ldots$, $\overset{\frown}{E_nD_n}$ границы (на черт. 48 $n=3$) и из линий AD_1, E_1D_2, $\ldots$, E_nB, лежащих целиком (кроме концов) внутри I. Очевидно, каждая из линий AD_1, E_1D_2, $\ldots$, E_nB есть прямолинейный отрезок.

Каждая часть границы D_1E_1, D_2E_2, $\ldots$, D_nE_n, входящая в s_0, направлена выпуклостью в сторону I. В самом деле, для каждого, достаточно малого участка $\overset{\frown}{CC'}$ границы q, направленной выпуклостью в сторону II, хорда CC' лежит



Черт. 48.



Черт. 49.

в I; эта хорда короче дуги $\overset{\frown}{CC'}$; поэтому, если линия s_0 содержала бы такую дугу $\overset{\frown}{CC'}$ границы, мы могли бы укоротить s_0, заменив дугу $\overset{\frown}{CC'}$ хордой CC', лежащей в I.

Итак, кратчайшая линия может содержать лишь части границы, направленные выпуклостью в сторону I.

Отрезки $AD_1, E_1D_2, \ldots, E_{n-1}D_n, E_nB$, входящие в состав s_0, касаются кривой q в точках соответственно $D_1, E_1, D_2, E_2, \ldots, D_n, E_n$ (черт. 48).

В самом деле, в точке, например, D_1 сходятся две части нити: отрезок AD_1 и часть $\overset{\frown}{D_1E_1}$ кривой q. Натяжение T_1 части AD_1 направлено по отрезку D_1A (черт. 49), натяжение T_2 части $\overset{\frown}{D_1E_1}$ направлено по касательной к q в точке D_1.

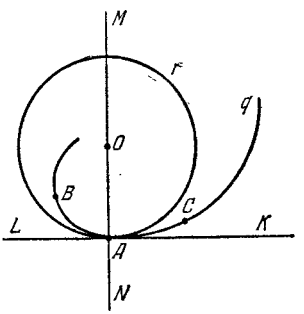
Если угол между направлениями T_1 и T_2 отличен от 180°, то равнодействующая T_0 сил T_1 и T_2 будет смещать точку D_1 (черт. 49), т. е. нить не будет находиться в положении равновесия. Этот угол равен 180°, т. е. отрезок AD_1 касается q в точке D_1.

Итак, кратчайшая линия в области I, соединяющая точки A и B состоит из отрезков касательных AD_1, E_1D_2, ... , E_nB и кусков границы D_1E_1, D_2E_2, ... , D_nE_n, обращенных выпуклостью в сторону I.

При рассмотрении кратчайших линий на многогранной поверхности на стр. 10 была сделана оговорка относительно расположения прямой на развертке. На основе изложенного в этом пункте материала от сделанного ранее ограничения можно отказаться.

§ 6. Некоторые сведения из теории плоских и пространственных кривых

1. Соприкасающаяся окружность. Пусть дана плоская кривая q (черт. 50). В точке A этой кривой проведем касательную KL и нормаль MN; проведем также всевозможные окружности, касающиеся прямой KL в точке A (т. е. имеющие с кривой q общую касательную в точке A); очевидно, их центры лежат на нормали MN.

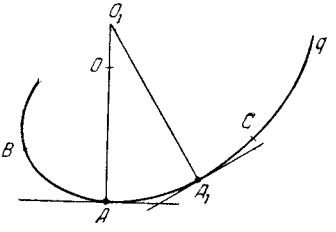


Черт. 50.

Среди всех этих окружностей имеется одна, наиболее близко прилегающая к кривой q в точке A. На нашем чертеже — это окружность r. Эта окружность называется *соприкасающейся окружностью*. Малую дугу $\overset{\frown}{BC}$ кривой q, заключающую точку A, приближенно можно считать дугой соприкасающейся окружности r. Чем меньше дуга $\overset{\frown}{BC}$, тем с большей точностью мы можем заменять ее дугой круга r. Точка O — центр круга r — называется иногда *центром кривизны*. Итак, маленькую дугу $\overset{\frown}{BC}$ кривой q, содержащую точку A, приближенно можно считать дугой окружности, имеющей центр в центре кривизны — в точке O.

Центр круга лежит на пересечении двух его радиусов, а так как радиусы суть нормали круга, то мы можем сказать, что центр круга лежит на пересечении его нормалей.

Рассмотрим теперь произвольную кривую q, на ней точку A и маленькую дугу $\overset{\frown}{BC}$, заключающую эту точку (черт. 51). Эту дугу можно приближенно считать дугой соприкасающейся окружности в точке O. Как найти центр этой окружности (центр кривизны)?



Черт. 51.

Так как мы считаем приближенно дугу $\overset{\frown}{BC}$ соприкасающейся окружностью, то мы можем указать следующий прием построения центра кривизны. Проведем нормаль к кривой q в точке A и в какой-нибудь близкой к ней точке A_1 кривой. Эти нормали пересекутся в точке O_1. Если мы считаем нашу дугу $\overset{\frown}{BC}$ дугой соприкасающейся окружности, то точка O_1 по предыдущему и будет центром соприкасающейся окружности (центром кривизны).

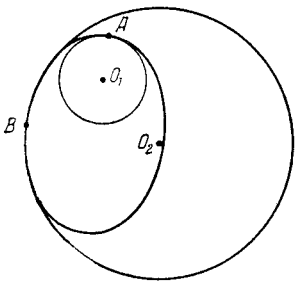
Примечание. Наше построение центра соприкасающейся окружности будет приближенным. Чем меньше дуга $\overset{\frown}{BC}$, тем точнее наше построение. Мы можем (точно) определить центр кривизны кривой q в точке A как предельное положение, к которому стремится точка пересечения нормали в точке A с нормалью в соседней точке A_1, когда точка A_1 стремится к точке A. Чем ближе к точке A точка A_1, в которой берем вторую нормаль, тем ближе точка пересечения этих нормалей — точка O_1 к предельному положению — к точке O. Соприкасающуюся окружность можно определить как окружность радиуса OA с центром в O.

Пример. На черт. 52 построены предыдущим приближенным методом центры кривизны и соприкасающиеся окружности в вершинах B и A эллипса.

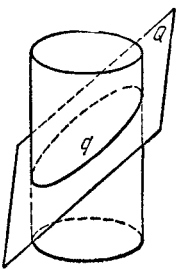
2. Пространственные кривые. До сих пор мы рассматривали кривые на плоскости. Перейдем теперь к изучению кривых в пространстве. Обратим внимание на то, что существуют кривые, которые не могут быть помещены на плоскости. Таковы, например, винтовые линии.

Пусть, в самом деле, нам задана винтовая линия q на поверхности цилиндра; если бы линия q была расположена в некоторой плоскости Q, то она была бы линией пересечения этой плоскости

с цилиндром. Возможны два случая: или плоскость Q пересекается с осью цилиндра, или она параллельна оси цилиндра. Если плоскость пересекается с осью цилиндра, то она пересекает цилиндр по замкнутой кривой (по эллипсу, черт. 53), а не по винтовой линии, которая является незамкнутой кривой. Если же плоскость параллельна оси цилиндра, то она или пересекает его поверхность по двум прямым, или, касаясь поверхности цилиндра, имеет с ней одну общую прямую, или же, наконец, совсем не пересекает цилиндра. Во всяком случае винтовая линия не может быть линией пересечения плоскости с поверхностью цилиндра.

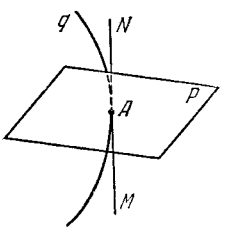


Черт. 52.



Черт. 53.

Касательная к пространственной кривой определяется так же, как и для случая плоской кривой. Будем называть *нормалью* к пространственной кривой q в ее точке A всякую прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную к касательной в точке A. Но к прямой в любой ее точке можно провести в пространстве бесчисленное множество перпендикуляров. Поэтому нормалей к кривой q в точке A существует бесконечное множество: они заполняют целую плоскость, перпендикулярную к касательной в точке A (черт. 54).



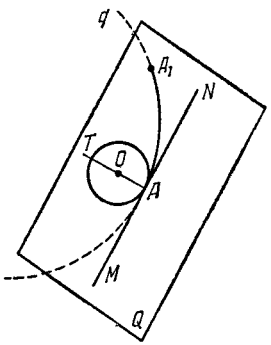
Черт. 54.

3. Соприкасающаяся плоскость. Возьмем на кривой q точку A и прямую MN, касательную в этой точке к кривой q (черт. 55). Пусть A_1 — точка на кривой, очень близкая к точке A. Маленький кусочек $\overset{\frown}{AA_1}$ пространственной кривой q приближенно можно считать дугой плоской кривой. Плоскость Q, проходящую через касательную MN и через точку A_1, приближенно можно считать плоскостью,

в которой лежит маленькая дуга AA_1 нашей кривой. Плоскость Q называется *соприкасающейся плоскостью к кривой q в точке A.*

Примечание. Дадим точное определение соприкасающейся плоскости. Проведем плоскость Q', проходящую через касательную MN к нашей кривой в точке A и через другую точку A_1 той же кривой. Пусть точка A_1 стремится к точке A, двигаясь по кривой q; при этом плоскость Q' будет поворачиваться вокруг MN и стремиться к предельной плоскости Q. Эта предельная плоскость называется *соприкасающейся плоскостью.* Если точка A_1 очень близка к точке A, то плоскость Q', проходящая через MN и точку A_1, будет очень близка к предельной плоскости Q. Мы поэтому можем приближенно считать такую плоскость Q' соприкасающейся плоскостью.

4. Главная нормаль. *Главной нормалью* к кривой q в точке A называется нормаль AT, расположенная в соприкасающейся плоскости (черт. 55).



Черт. 55.

Если кривая q лежит целиком в плоскости Q (т. е. если кривая q — плоская), то плоскость Q есть соприкасающаяся плоскость для всех точек кривой q, а нормали к q, лежащие в этой плоскости, являются главными ее нормалями.

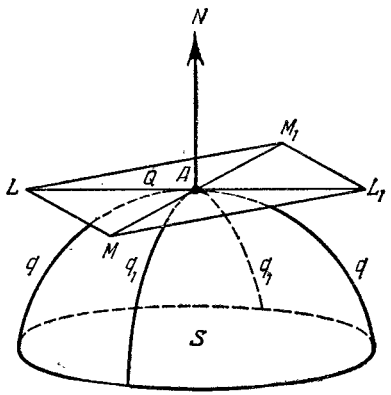
5. Соприкасающаяся окружность для пространственной кривой. Маленькую дугу пространственной кривой, содержащую точку A, можно приближенно рассматривать, как плоскую дугу, расположенную в плоскости Q, соприкасающейся с кривой q в точке A. Но каждую плоскую дугу в свою очередь можно приближенно рассматривать как дугу соприкасающейся окружности (расположенной в той же плоскости и имеющей с кривой общую касательную). Значит, маленькую дугу кривой q, содержащую точку A, можно приближенно рассматривать как дугу некоторой окружности в соприкасающейся плоскости (черт. 55). Эту окружность называют *соприкасающейся окружностью пространственной кривой.* Ее центр O находится на главной нормали к кривой. Итак, маленькие участки плоских и пространственных кривых можно приближенно рассматривать как дуги соприкасающихся окружно-

стей. *Чем меньше дуга кривой, тем с большей точностью можно заменять дуги кривой дугами соприкасающихся окружностей.*

Все эти сведения из теории кривых нужны для дальнейшего.

§ 7. Некоторые сведения из теории поверхностей

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Рассмотрим поверхность S и точку A на ней (черт. 56); маленький кусочек поверхности вокруг точки A можно приближенно рассматривать как кусочек плоскости Q, так называемой *касательной плоскости* к поверхности S в точке A. *Касательная плоскость* Q есть плоскость, в которой лежат касательные прямые в точке A к кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку A.



Черт. 56.

Если провести на S две кривые q и q_1, проходящие через точку A, с несовпадающими касательными LL_1 и MM_1 в точке A, то касательная плоскость Q есть плоскость, определяемая прямыми LL_1 и MM_1.

Нормалью к поверхности S в точке A называется прямая, проходящая через A и перпендикулярная к касательной плоскости Q в точке A поверхности S.

Нормаль AN к поверхности служит нормалью ко всем кривым, лежащим на этой поверхности и проходящим через точку A (она, вообще говоря, не будет их главной нормалью в этой точке).

Примеры. Нормалью к поверхности шара в некоторой ее точке является радиус шара в этой точке.

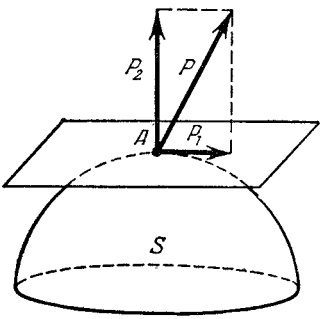
Нормалью к поверхности цилиндра в некоторой ее точке является радиус кругового сечения цилиндра в этой точке.

Примечание. Кривая необязательно имеет касательную в каждой своей точке. Возьмем, например, ломаную линию; нельзя

определить для нее касательную в ее вершине. Точно так же необязательно пространственная кривая имеет соприкасающуюся плоскость, а поверхность — касательную плоскость и нормаль и т. д. Например, коническая поверхность не имеет касательной плоскости и нормали к вершине конуса.

Мы во всем дальнейшем ограничимся только «*гладкими*» *кривыми*, т. е. кривыми, имеющими в каждой точке касательную, соприкасающуюся плоскость, центр кривизны, и «*гладкими*» *поверхностями*, т. е. поверхностями, имеющими в каждой точке нормаль. На поверхности мы рассматриваем только «гладкие» кривые.

2. Условие равновесия точки на поверхности. Рассмотрим точку A, способную перемещаться только по поверхности S. Пусть P есть равнодействующая сил, действующих на эту точку (черт. 57). Обозначим через P_1 касательную составляющую силы P (т. е. составляющую, расположенную в плоскости Q, касательной к S в точке A) и через P_2 нормальную составляющую, направленную по нормали к поверхности S в точке A. Касательная составляющая P_1 смещает точку A по поверхности, поэтому для равновесия точки A на поверхности необходимо равенство нулю касательной составляющей P_1; это означает: сила P совпадает с ее нормальной составляющей P_2. *Итак, для равновесия точки A на поверхности необходимо, чтобы равнодействующая P сил, действующих на точку A, была направлена по нормали к поверхности в этой точке.*



Черт. 57.

3. Некоторые задачи на кратчайшие линии в пространстве. Найти кратчайшую линию, соединяющую точки двух пространственных кривых.

Повторяя рассуждения п. 3 § 5 мы убедимся, что кратчайшей линией, соединяющей точки двух кривых, является отрезок их общей нормали.

В частности, линия, дающая кратчайшее расстояние между точками двух непересекающихся прямых в пространстве, есть отрезок их общего перпендикуляра.

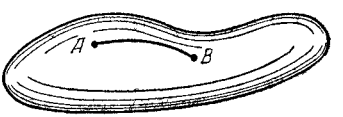
Наконец, аналогично можно показать, что кратчайшее расстояние между двумя поверхностями есть отрезок их общей нормали.

ГЛАВА III. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

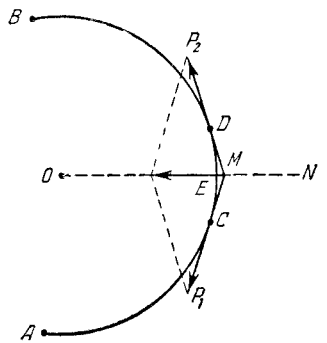
§ 8. Теорема И. Бернулли о геодезических линиях

1. Равновесие упругой нити на поверхности. На некоторой поверхности S заданы две точки A и B. Эти точки можно соединить бесчисленным множеством линий, лежащих на поверхности. Среди этих линий найдется кратчайшая линия q. Нашей задачей является исследование свойств этой кратчайшей линии.

Представим себе натянутую на поверхности резиновую нить, закрепленную в точках A и B (черт. 58). Эта линия находится в состоянии равновесия, если она приняла форму кратчайшей линии q. В самом деле, если выведем ее из положения q, изменив несколько ее форму, то мы удлиним ее и, стремясь сократиться, она вновь придет в положение q. Следовательно, *нить, расположенная по кратчайшей линии q, будет находиться в положении равновесия и притом устойчивого.*



Черт. 58.



Черт. 59.

Мы начнем с исследования линии равновесия упругой нити на поверхности.

Рассмотрим сначала нить $\overset{\smile}{AB}$, имеющую форму дуги окружности (черт. 59). На кусочек $\overset{\smile}{CD}$ нашей нити действуют натяжения остальных частей нити; именно в точке C действует натяжение части CA нити, в точке D — натяжение части DB. Эти натяжения направлены по касательным в точках C и D. Обозначим их через P_1 и P_2. Силы P_1 и P_2 равны по величине, иначе часть $\overset{\smile}{CD}$ нашей нити не осталась бы в состоянии равновесия. Найдем теперь равнодействующую сил P_1 и P_2.

Пусть точка M есть точка пересечения касательных в точках C и D (по этим касательным направлены силы P_1

и P_2). Перенесем силы P_1 и P_2 в точку M. Легко видеть, что равнодействующая будет направлена к центру O окружности (на которой расположена нить $\overset{\smile}{AB}$). Обозначим через E середину дуги $\overset{\smile}{CD}$. Равнодействующая сил натяжения, действующих на дугу $\overset{\smile}{CD}$, проходит через середину E этой дуги и направлена по радиусу EO. Так как радиус EO есть нормаль к дуге $\overset{\smile}{AB}$ в точке E, то получаем окончательно: *равнодействующая сил натяжения, действующих на дугу окружности* $\overset{\smile}{CD}$, *проходит через середину* E *этой дуги и направлена по нормали к окружности в точке* E.

Рассмотрим теперь общий случай. На поверхности натянута резиновая нить, закрепленная в точках A и B и имеющая форму кривой q.

Выделим маленький кусочек $\overset{\smile}{CD}$ этой нити [1]). На $\overset{\smile}{CD}$ действуют силы натяжения P_1 и P_2, приложенные в точках C и D и направленные по касательным к q в этих точках. Мы можем рассматривать маленькую дугу нашей кривой как дугу соприкасающейся окружности в середине E этой дуги. Радиус EO этой окружности направлен по *главной нормали к кривой* q *в точке* E. Равнодействующая сил натяжения, действующих на дугу окружности, пойдет по радиусу, проходящему через середину этой дуги, в данном случае по радиусу EO. Итак, *равнодействующая сил натяжения, действующих на маленькую дугу* $\overset{\smile}{CD}$ *нашей нити, проходит через ее середину* E *и направлена по главной нормали* EO *в точке* E.

Теперь уже нетрудно найти те условия, при которых нить находится в равновесии. Если нить находится в состоянии равновесия, то каждая ее малая часть $\overset{\smile}{CD}$ тоже находится в состоянии равновесия. Для того чтобы дуга $\overset{\smile}{CD}$ находилась в равновесии, нужно, чтобы эта равнодействующая была направлена по нормали к поверхности. Силы натяжения, действующие на $\overset{\smile}{CD}$, имеют равнодействующую, направленную по главной нормали EO к кривой q. Значит, одна и та же прямая EO должна быть в одно и то же время

[1]) Ввиду малости $\overset{\smile}{CD}$ мы можем считать ее дугой окружности и использовать тот же черт. 59.

главной нормалью к кривой q в точке E и нормалью к поверхности S в этой точке.

Получаем теорему: *для того чтобы натянутая на поверхности S упругая нить q находилась в состоянии равновесия, необходимо, чтобы в любой ее точке A главная нормаль в ней совпадала с нормалью к поверхности.*

2. Геодезические линии. *Линия q называется геодезической на поверхности S, если в каждой ее точке главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности.*

Геодезическую линию можно определить так же как линию на поверхности, у которой соприкасающаяся плоскость в каждой ее точке проходит через нормаль к поверхности в этой точке. В самом деле, пусть A — точка на кривой q, лежащей на поверхности S. Нормаль к поверхности в точке E есть в то же время нормаль к кривой q в этой точке; эта нормаль будет главной нормалью, если она расположена в плоскости, соприкасающейся с q в точке A.

Доказанную выше теорему можно формулировать так: *Натянутая нить на поверхности будет находиться в состоянии равновесия, если она расположена по геодезической линии этой поверхности.*

Пример 1. На поверхности цилиндра натянутые нити расположатся, как мы убедились выше, вдоль винтовых линий. *Винтовые линии поэтому суть геодезические линии на поверхности цилиндра.* Главные нормали к винтовым линиям совпадают с нормалями к поверхности цилиндра, а нормали к поверхности цилиндра суть радиусы круговых сечений. Итак, *главные нормали винтовых линий суть радиусы круговых сечений.*

Пример 2. Рассмотрим, в каком случае плоская кривая q может быть геодезической линией на некоторой поверхности S. Обозначим через Q плоскость, в которой лежит линия q. Для плоской кривой q соприкасающейся плоскостью в любой ее точке будет сама плоскость Q.

В силу второго определения геодезической линии, если кривая q является геодезической линией, то нормали к поверхности S в точках кривой q должны лежать в ее соприкасающейся плоскости, т. е. нормали к поверхности S в точках кривой q должны лежать в плоскости Q.

Пример 3. Рассмотрим поверхность шара. Рассечем эту поверхность плоскостью Q, проходящей через центр шара. Получим так называемый большой круг на поверхности

шара. *Большой круг есть геодезическая линия на поверхности шара.*

В самом деле, нормалями к поверхности шара в ее точках являются радиусы шара. Радиусы в точках большого круга лежат в плоскости этого круга. Мы имеем случай плоской кривой на поверхности, в точках которой нормали к поверхности лежат в плоскости этой кривой. А мы только что убедились, что такая плоская кривая есть геодезическая.

Если мы рассечем шар плоскостью Q_1, не проходящей через центр шара, то получим малый круг на поверхности шара. Так как нормали к поверхности шара (т. е. радиусы шара) в точках малого круга не лежат в плоскости малого круга, то малый круг не является геодезической линией на поверхности шара.

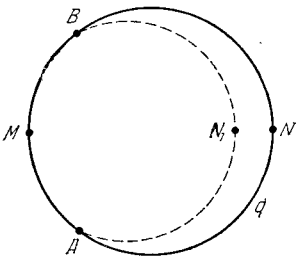
Резиновая нить, туго натянутая по дуге большого круга, будет находиться в состоянии равновесия. Если же ее натянуть по дуге малого круга, то она соскользнет с этой дуги, так как не будет находиться в ней в состоянии равновесия.

Теорема Иоганна Бернулли. *Кратчайшая из всех линий, соединяющих две точки на поверхности, есть дуга геодезической линии.*

Мы уже обладаем доказательством теоремы Бернулли. В самом деле, с одной стороны, мы доказали, что линии, по которым располагаются натянутые на поверхности нити, находящиеся в состоянии равновесия, суть геодезические. С другой стороны, мы знаем, что резиновая нить на поверхности, закрепленная в точках A и B на ней и расположенная по кратчайшей линии, соединяющей эти точки, находится в состоянии равновесия (ряд других элементарных доказательств этой теоремы приведен в книге М. Я. Выгодского, Дифференциальная геометрия, М.—Л., Гостехиздат, 1949).

Примечание. Проведем через две точки A и B на поверхности шара большой круг q. Точки A и B делят его на две дуги (черт. 60): дугу $\overset{\frown}{AMB}$ и дугу $\overset{\frown}{ANB}$. Обе эти дуги—геодезические, соединяющие точки A и B. Пусть дуга $\overset{\frown}{AMB}$ короче дуги $\overset{\frown}{ANB}$. Тогда, очевидно, $\overset{\frown}{AMB}$ есть кратчайшая дуга на поверхности шара, соединяющая точки A и B, дуга же $\overset{\frown}{ANB}$, хотя и является геодезической, все же не будет кратчайшей дугой на поверхности шара, соединяющей точки A и B. Резиновая нить, натянутая на поверхности шара по любой из этих дуг, будет находиться в состоянии

равновесия. Но в то время как нить, натянутая по дуге $\overset{\frown}{AMB}$, находится в состоянии *устойчивого* равновесия, нить, натянутая по дуге $\overset{\frown}{ANB}$, находится в состоянии *неустойчивого* равновесия. Если мы выведем нить из положения $\overset{\frown}{ANB}$ так, чтобы она приняла форму кривой $\overset{\frown}{AN_1B}$ (черт. 60), близкой к $\overset{\frown}{ANB}$, но более короткой, то она будет скользить по поверхности шара, удаляясь от положения $\overset{\frown}{ANB}$.



Черт. 60.

Итак, мы видим, что *свойство быть геодезической — необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы линия была кратчайшей.*

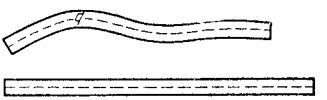
Можно, однако, показать, что достаточно малая дуга геодезической всегда является кратчайшей.

Геодезическая линия может быть определена как линия, достаточно малые дуги которой являются кратчайшими.

3. «Построение» геодезической линии. Будем водить острием ножа по некоторой поверхности S; в каждый момент острие ножа будет касаться поверхности в какой-нибудь точке A (черт. 61). При этом будем держать нож так, чтобы все время нормаль к поверхности в точке ее прикосновения с острием ножа проходила через плоскость ножа. Линия q, которую нацарапает при этом острие ножа на поверхности S, будет геодезической.

Черт. 61.

В самом деле, рассмотрим маленькую дугу $\overset{\frown}{BC}$, кривой q, нацарапанной ножом, и точку A на ней. Можно считать приближенно, что дуга $\overset{\frown}{BC}$ находится в плоскости ножа в тот момент, когда он своим острием касается поверхности в точке A. Таким образом, плоскость ножа в момент прикосновения его острого края к поверхности в точке A есть соприкасающаяся плоскость кривой q в точке A. Но нам известно из предыдущего, что если соприкасающаяся плоскость кривой q проходит постоянно через нормаль к поверхности, кривая q — геодезическая. Следовательно, кривая q — геодезическая на нашей поверхности.



Черт. 62.

Можно рассмотреть для произвольной поверхности еще одну задачу: развернуть узкую полоску, вырезанную из поверхности, на плоскость и, обратно, навернуть плоскую полоску на поверхность. Необходимо определить точнее, что мы под этим понимаем.

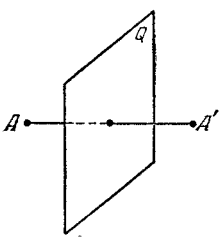
Пусть дана кривая q на поверхности. Окружим ее узкой полоской (черт. 62). Эту полоску, вообще говоря, нельзя развернуть

на плоскость так, чтобы длины кривых, расположенных в полоске, не искажались. Однако, чем уже полоска, тем относительно меньше будут эти искажения [1]).

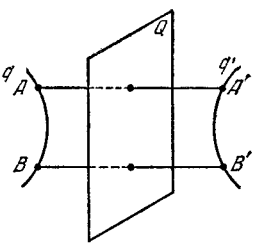
Если мы навернули узкую полоску поверхности на плоскость, то кратчайшая линия полоски, соединяющая две точки, перейдет в дугу, обладающую аналогичным свойством на плоской полоске, т. е. в отрезок прямой. Обратно, прямолинейный отрезок на плоской полоске, которую наворачивают на поверхность, перейдет в кратчайшую дугу на поверхности—в геодезическую дугу. Поэтому узкая полоска (лента, ширина которой очень мала по сравнению с длиной), окружающая прямолинейный отрезок, *ляжет на поверхность так, что отрезок прямой перейдет в геодезическую дугу.* Наша узкая лента ляжет на поверхность вдоль геодезической линии. Поэтому, накладывая на поверхность длинные узкие ленты, можно составить представление о ходе геодезических линий на поверхности.

§ 9. Дополнительные замечания о геодезических линиях

1. Плоскость симметрии. Мы сейчас приведем несколько примеров геодезических линий. Напомним предварительно читателю одно определение: *две точки A и A' называются симметричными относительно плоскости Q, если они лежат с разных сторон от плоскости Q, находятся от нее на равных расстояниях и лежат на одном к ней перпендикуляре* (черт. 63).



Черт. 63.



Черт. 64.

Две фигуры q и q' называются симметричными относительно плоскости Q, если каждой точке A фигуры q отвечает симметричная ей относительно Q точка A' фигуры q', и обратно (черт. 64).

Плоскость Q называется *плоскостью симметрии* поверхности S, если она делит S на две симметричные относительно Q части.

---

[1]) Выражаясь языком анализа бесконечно малых, изменения длины кривых будут величинами бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с шириной полоски.

Примеры. Для поверхности шара плоскостью симметрии будет любая плоскость, проходящая через центр шара.

Для поверхности круглого конуса и цилиндра плоскостями симметрии будут плоскости, проходящие через их оси.

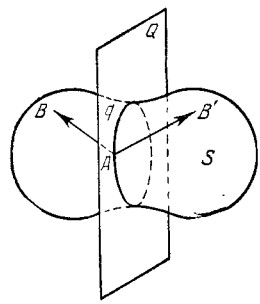
Для ограниченного круглого цилиндра плоскостью симметрии будет плоскость, перпендикулярная к оси цилиндра, делящая высоту на две равные части.

Для бесконечно длинного цилиндра (т. е. цилиндра, образующие которого — бесконечные прямые) любая плоскость, перпендикулярная к оси, будет плоскостью симметрии.

Теорема. *Пусть поверхность S имеет плоскость симметрии Q, пересекающую S по линии q. Линия q есть геодезическая линия поверхности* [1]).

По предположению линия q лежит в плоскости Q. Плоская линия q (см. пример 2 предыдущего параграфа) будет геодезической, если нормаль к поверхности S во всякой точке кривой q лежит в плоскости Q.

Пусть точка A — произвольная точка кривой q (черт. 65). Мы докажем, что нормаль к поверхности S в точке A лежит в плоскости Q. Предположим обратное: нормаль AB к поверхности S в точке A не лежит в плоскости Q. Обозначим через AB' прямую, симметричную с AB относительно Q. Так как AB не лежит сама в Q, то AB отлична от AB'. Но плоскость Q есть плоскость симметрии для поверхности, и если AB есть нормаль к S в точке A, то симметричная ей прямая AB' есть также нормаль к S в точке A. Итак, поверхность S обладает в точке A двумя нормалями, что невозможно. Мы пришли к противоречию; тем самым мы доказали, что нормаль к S во всякой точке A кривой лежит в плоскости Q. Наша теорема полностью доказана.



Черт. 65.

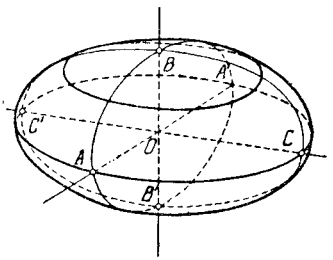
2. Замкнутые геодезические. Если натянуть на поверхность S петлю из резиновой нити так, чтобы последняя оказалась в положении равновесия, то она примет форму некоторой замкнутой линии q. Эта линия q есть *геодезическая линия* и притом *замкнутая*. Так, резиновая петля на

[1]). Напомним, что мы рассматриваем лишь гладкие поверхности.

поверхности шара, если ей придать форму большого круга, будет находиться в состоянии равновесия. Большие круги на поверхности шара, а также эллипсы — меридианы на поверхности эллипсоида вращения — суть замкнутые геодезические линии (о поверхностях вращения см. § 10).

Если замкнутая поверхность S имеет несколько плоскостей симметрии, то *каждая плоскость симметрии* (в силу доказанной выше теоремы) пересекает поверхность по замкнутой геодезической.

Эллипсоид с тремя различными по величине осями AA', BB', CC' (черт. 66) имеет три плоскости симметрии, каждая из которых проходит через две оси эллипсоида. Эти три плоскости пересекаются с эллипсоидом по трем эллипсам E_1, E_2, E_3 — трем замкнутым геодезическим.



Черт. 66.

Можно доказать, что на *всякой замкнутой поверхности имеется по крайней мере три замкнутые геодезические линии* [1]).

3. Принцип Герца. Точка, движущаяся на плоскости по инерции, движется по прямой линии (первый закон Ньютона).

Точка же, которая движется по поверхности и на которую не действуют внешние силы, движется по геодезической линии.

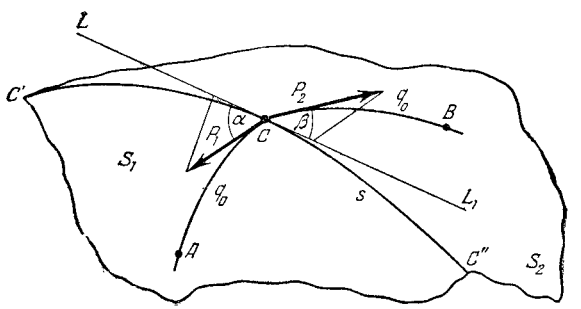
В этом заключается *принцип Герца*. Например, точка на поверхности шара, если на нее не действуют внешние силы, движется по большому кругу, на поверхности цилиндра — по винтовой линии.

---

[1]) Доказательство этой не элементарной теоремы приведено в статье Л. А. Люстерника и Л. Шнирельмана, Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей, УМН II, вып. 1 (17), (1947).

В самом деле, ускорение, которое испытывает точка, движущаяся по кривой q, можно разложить на *тангенциальное* (направленное по касательной к q) и *нормальное* (направленное по главной нормали к кривой q). Но если точка движется без воздействия внешних сил по кривой q, расположенной на поверхности S, то на точку действует только реакция поверхности; сила реакции поверхности направлена по нормали к поверхности. Так как направление силы совпадает с направлением ускорения, то направление ускорения нашей точки в каждый момент должно совпадать с направлением нормали к поверхности. Нормаль к поверхности в некоторой точке кривой перпендикулярна к касательной к кривой q в этой же точке. Так как ускорение направлено по нормали к поверхности, т. е. перпендикулярно к касательной к q, то тангенциальное ускорение равно нулю. Следовательно, наша точка обладает только нормальным ускорением, направленным по главной нормали к q. Направление ускорения есть в одно и то же время направление главной нормали к кривой q и нормали к поверхности S. Значит, эти направления совпадают во всякой точке кривой q, откуда следует, что кривая q есть геодезическая линия на поверхности S.

4. Геодезические линии на поверхности с ребром. Рассмотрим поверхность S, состоящую из двух



Черт. 67.

гладких поверхностей S_1 и S_2, прилегающих друг к другу по кривой s, которую будем называть *ребром* поверхности S (примером такой поверхности может служить поверхность двугранного угла). Пусть на поверхности S взяты две точки A и B, лежащие соответственно на S_1 и S_2 (черт. 67), и пусть

$q_0 = ACB$ есть положение равновесия упругой нити на поверхности S. При этом точка C принадлежит ребру s, а дуги $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{CB}$ кривой q_0 — соответственно частям S_1 и S_2. Очевидно $\overset{\smile}{AC}$ есть геодезическая на S_1, а $\overset{\smile}{CB}$ — геодезическая на S_2. Найдем условие равновесия в точке перелома C методом, которым мы пользовались в § 8. Кривая q_0 есть положение равновесия гибкой нити на поверхности S, закрепленной в точках A и B.

Обозначим через α угол между дугой $\overset{\smile}{AC}$ и частью CC' ребра s, через β — угол между частью CC'' ребра s и дугой CB (т. е. между их касательными). На точку C действуют силы натяжения: P_1, направленная по касательной к дуге $\overset{\smile}{CA}$, и P_2, направленная по касательной к дуге $\overset{\smile}{CB}$. Каждая из этих сил равна T. Проекции этих сил на касательную LL_1 к ребру s в точке C равны соответственно $T\cos\alpha$ и $T\cos\beta$ и направлены в противоположные стороны. Условие равновесия

$$T\cos\alpha = T\cos\beta$$

дает нам

$$\alpha = \beta. \tag{1}$$

Углы, которые образуют с ребром s в точке перелома дуги $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{CB}$, равны между собой.

Линию q_0 естественно называть *геодезической* на поверхности S.

Если поверхность S состоит из нескольких гладких частей, разделенных ребрами

$$s_1, s_2, \ldots, s_n,$$

то геодезические линии (линии равновесия упругой нити) на таких поверхностях состоят из дуг геодезических, смыкающихся на ребрах

$$s_1, s_2, \ldots, s_n,$$

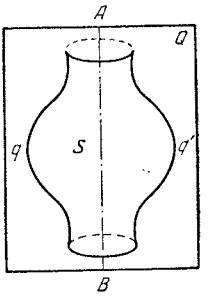
причем в каждой точке стыка выполняется условие (1).

Кратчайшие линии на поверхности S являются геодезическими. Выведенное в § 1 свойство кратчайших на многогранных поверхностях является частным случаем свойства геодезических (и кратчайших) на поверхностях с ребрами.

Означенное свойство геодезических на таких поверхностях можно вывести также из принципа Герца.

§ 10. Геодезические линии на поверхностях вращения

1. Поверхность вращения. Будем вращать плоскую кривую q вокруг прямой AB, расположенной в одной плоскости с q (черт. 68). При вращении q вокруг AB образуется некоторая поверхность S, которая называется поверхностью вращения. Всякая плоскость Q, проходящая через ось вращения AB, пересекает S по паре кривых q и q'. Эти кривые называются *меридианами*. Они получаются из кривой q путем поворота ее на соответственный угол вокруг оси вращения. Каждая плоскость, перпендикулярная к оси, пересекает S по окружности, называемой *параллелью*.

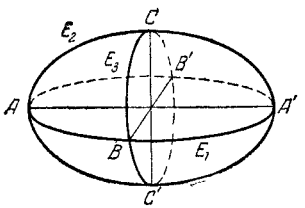


Черт. 68.

Теорема 1. *Все меридианы поверхности вращения суть геодезические кривые.*

В самом деле, рассмотрим меридианы q и q', образованные пересечением поверхности вращения с плоскостью Q, проходящей через ось AB. Плоскость Q есть плоскость симметрии поверхности вращения S, следовательно, она пересекает поверхность S по геодезическим кривым. Итак, линии q и q' — геодезические.

Пример. Будем вращать эллипс E вокруг его оси (черт. 69). Получится так называемый эллипсоид вращения. Его меридианы суть эллипсы, равные E. Эти эллипсы являются геодезическими.



Черт. 69.

Замечание. На поверхности цилиндра все параллели являются геодезическими; на поверхности шара из параллелей геодезической является только экватор; на поверхности конуса ни одна параллель не является геодезической.

2. Теорема Клеро. Рассмотрим геодезическую линию q на поверхности вращения S. Пусть A — произвольная точка геодезической q, r — ее расстояние от оси вращения (радиус параллели), α — угол между геодезической q и меридианом в точке A.

Теорема 2 (Клеро). *Во всех точках геодезической q выражение* $r\sin\alpha$ *есть величина постоянная:*

$$r\sin\alpha = c = \text{const}. \tag{1}$$

Если через β обозначить угол между геодезической и параллелью, то формула (1) примет вид

$$r\cos\beta = \text{const}.$$

Частный случай теоремы Клеро для поверхности конуса и цилиндра уже доказан (см. п. 4 § 3).

Рассмотрим поверхность S_n, образованную вращением ломаной $A_0A_1 \ldots A_n$ вокруг оси L. Поверхность S_n состоит из n поверхностей $s_1, s_2, \ldots, s_n$, образованных вращением соответственно сторон $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$. Эти поверхности отделены одна от другой «ребрами» $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ — параллелями, полученными вращением вершин ломаной $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$.

Рассмотрим две точки A и B на поверхности S_n и соединяющую их геодезическую q_0. В силу доказанного в п. 4 § 9 геодезическая q_0 состоит из геодезических дуг на поверхностях усеченных конусов или цилиндров

$$s_1, s_2, \ldots, s_n,$$

смыкающихся по ребрам

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1},$$

причем углы, образованные каждой из смыкающихся геодезических дуг с «ребром», равны между собой. При движении вдоль q_0 угол β кривой q_0 с параллелью меняется непрерывно, без скачков (скачок в изменении этого угла мог бы произойти, когда параллель превращается в одно из «ребер», но в силу сказанного выше он не наступает). Поэтому и величина $r\cos\beta$ меняется непрерывно, без скачков.

Проследим, что происходит с величиной $r\cos\beta$, когда мы перемещаемся по q_0. Пока мы движемся по одной из поверхностей

$$s_0, s_1, \ldots, s_n,$$

выражение $r\cos\beta$ остается постоянным (в силу уже доказанного частного случая теоремы Клеро). При переходе через одно из «ребер»

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$$

это выражение не делает скачков. Значит, оно остается

постоянным вдоль всей линии q_0. Таким образом, для всех точек геодезической q_0 имеет место соотношение

$$r \cos \beta = \text{const}.$$

Произвольная плоская кривая m может быть рассматриваема как предельная для вписанных многоугольников m_n, когда число их сторон n неограниченно растет и длина наибольшей стороны стремится к нулю. Поверхность S, образованная вращением m вокруг некоторой оси, является предельной для поверхностей S_n, образованных вращением m_n вокруг той же оси. Для кратчайших линий на поверхностях S_n выполняется теорема Клеро. Отсюда мы делаем заключение, что она выполняется и для кратчайших на поверхности S.

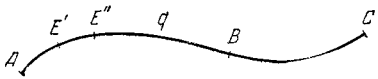
ЛЕКЦИЯ 2

ГЛАВА IV. ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ НАТЯНУТОЙ НИТИ

§ 11. Движения линий, не меняющие их длин

1. Потенциальная энергия гибкой нити. Будем считать, что гибкая нить обладает равным натяжением T во всех ее точках и что это натяжение сохраняется при изменении длины нити. Определим потенциальную энергию нити.

Пусть $q = \overset{\frown}{ABC}$ гладкая кривая длины l, состоящая из дуг $\overset{\frown}{AB}$ длины l_0 и $\overset{\frown}{BC}$ длины $(l - l_0)$ (черт. 70). Пусть нить, занимавшая положение $\overset{\frown}{AB}$, перешла, извиваясь вдоль кривой q, в положение $\overset{\frown}{ABC}$, так что точка A закреплена, а точка B



Черт. 70.

описала линию $\overset{\frown}{BC}$ длины $(l - l_0)$. Рассмотрим работу, выполненную силами натяжения.

Силы натяжения в точке B выполнили работу, равную $T(l - l_0)$.

Работа сил натяжения, действующих на малую дугу EE' кривой q, равна нулю. В самом деле, равнодействующая этих сил направлена по нормали к кривой q, между тем как дуга EE' скользит по самой кривой q.

Таким образом, общая работа сил натяжения при нашем движении нити сводится к работе силы, приложенной к концу B, т. е. равна

$$T(l - l_0) = Tl - Tl_0.$$

Пусть потенциальная энергия нити, когда она занимала положение $\overset{\smile}{AB}$, равна V_0, а ее потенциальная энергия, когда она заняла положение $\overset{\smile}{ABC}$, равна V. Приращение потенциальной энергии $V - V_0$ равно проделанной работе, т. е.

$$V - V_0 = Tl - Tl_0$$

или

$$V - Tl = V_0 - Tl_0. \tag{1}$$

Будем считать, что когда длина нити стремится к нулю, потенциальная энергия стремится к нулю; при $l_0 \to 0$ имеем, следовательно, $V_0 \to 0$, а значит, $(V_0 - Tl_0) \to 0$. Переходя к пределу в правой части равенства (1) при $l_0 \to 0$, получаем:

$$V - Tl = 0,$$

отсюда

$$V = Tl. \tag{2}$$

Потенциальная энергия гибкой нити равна ее длине, умноженной на натяжение.

Следствие. Если при перемещении нити работа сил натяжения равна нулю, то длина нити не изменилась. В самом деле, в этих условиях не изменилась потенциальная энергия нити, которой пропорциональна длина нити.

Заметим, что если прямолинейный отрезок AB перемещается, оставаясь прямолинейным, то общая работа сил натяжения сводится к работе сил натяжения в концах этого отрезка.

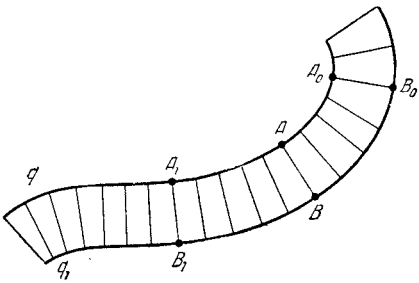
Работа нити, сохраняющей форму ломаной ACB, сводится к работе сил натяжения в концах A и B ломаной и в ее вершине C.

2. Параллельные линии. Две линии с общими нормалями называются *параллельными*. Простейшими примерами параллельных линий являются параллельные прямые и концентрические окружности.

Теорема 1. *Отрезки общих нормалей между параллельными линиями q и q_1 имеют равные длины.*

Пусть общая нормаль AB к кривым q и q_1 перемещается от положения A_0B_0 до положения A_1B_1, оставаясь все время общей к ним нормалью (черт. 71).

Работа сил натяжения при таком перемещении равна нулю. В самом деле, в конце A сила натяжения направлена по нормали к кривой, поэтому при перемещении этого конца по кривой q работа сил натяжения равна нулю. Аналогично в конце B, перемещаемом по кривой q_1, работа сил натяжения равна нулю. Итак, при нашем перемещении общей

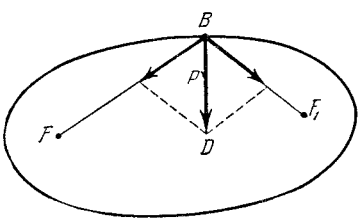


Черт. 71.

нормали работа сил натяжения равна нулю. В силу сформулированного следствия длина l общей нормали при этом не меняется:

$$l(A_0B_0) = l(A_1B_1).$$

3. Нормали к эллипсу и параболе. *Эллипсом называется геометрическое место точек B, сумма расстояния которых от заданных точек F и F_1 есть величина постоянная*:



Черт. 72.

$$FB + F_1B = 2a \qquad (3)$$

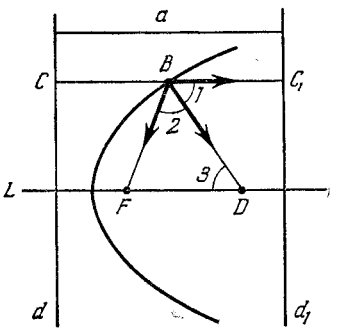
(*a — постоянная величина*).

Точки F и F_1 называются *фокусами* эллипса, отрезки FB и F_1B — *радиус-векторами*.

Теорема 2. *Нормаль эллипса в любой его точке B есть биссектриса BD угла FBF_1, образованного радиус-векторами* (черт. 72).

В самом деле, пусть упругая нить, имеющая форму ломаной FBF_1, закреплена в точках F и F_1; если перемещать

эту нить, двигая точку B по эллипсу, ее длина (в силу (3)) не меняется. А значит, работа сил натяжения все время равна нулю. Работа сил натяжения сводится к работе сил в точке B. В этой точке приложены две равные силы натяжения по направлениям BF и BF_1. Их равнодействующая P направлена по биссектрисе BD угла FBF_1. Так как при смещении точки B по эллипсу работа P равна все время нулю, то P направлено все время по нормали к эллипсу. Нормаль к эллипсу в любой его точке B совпадает, следовательно, с биссектрисой угла FBF_1.



Черт. 73.

Параболой называется геометрическое место точек B, расстояния которых от данной точки F и от данной прямой d равны между собой:

$$FB = BC \tag{4}$$

(*BC — перпендикуляр, опущенный из B на прямую d* (черт. 73)). Точка F называется *фокусом* параболы, прямая d — ее *директрисой*, а перпендикулярная к d прямая LL, проходящая через фокус, — *осью* параболы. Проведем прямую d_1, параллельную d, так, что фокус F и директриса d находятся по одну сторону d_1. Обозначим через a расстояние между параллельными прямыми d и d_1. Проведем через точку B параболы общий перпендикуляр CC_1 к прямым d и d_1 (CC_1 параллелен оси LL). Имеем:

$$CC_1 = CB + BC_1 = a,$$

где a — величина постоянная, равная расстоянию между параллельными прямыми d и d_1. В силу (4)

$$FB + BC_1 = a. \tag{5}$$

Теперь нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Нормаль в произвольной точке B параболы есть биссектриса угла FBC, образованного радиус-вектором FB и прямой BC_1, параллельной оси LL.*

Рассмотрим нить, имеющую форму ломаной FBC_1, у которой конец F закреплен, конец C_1 скользит по прямой d_1, так что BC_1 остается ей перпендикулярным, а точка B скользит по параболе.

Длина этой нити, как видно из формулы (5), остается неизменной, значит, общая работа сил натяжения равна нулю. Эта работа складывается из работ сил натяжения в точках C_1 и B. Работа силы натяжения в точке C_1 равна нулю, так как направление этой силы (по отрезку C_1B) перпендикулярно к прямой d_1, по которой смещается точка C_1. Значит, и работа сил натяжения в точке B равна нулю. Повторяя рассуждения, приведенные при исследовании случая эллипса, приходим к доказательству теоремы [1]).

Примечание. Из теоремы 3 следует правило построения нормали к параболе. Отложим по оси LL отрезок FD, равный радиус-вектору FB параболы. Прямая BD есть нормаль к параболе.

В самом деле, на черт. 73 углы $\angle 1$ и $\angle 3$ равны, как внутренние накрестлежащие при параллельных LL и CC_1 и секущей BD; углы $\angle 3$ и $\angle 2$ равны, так как треугольник FBD — равнобедренный. Отсюда получаем: $\angle 2 = \angle 1$, т. е. BD есть биссектриса угла FBC; значит, в силу теоремы 3 она есть нормаль к параболе в точке B.

4. Геодезические касательные и нормали. Если геодезическая дуга $\overset{\smile}{AB}$ перемещается по поверхности, то работу производят только силы натяжения, действующие на концы A и B дуги. В самом деле, равнодействующая сил, действующих на любую малую внутреннюю часть дуги $\overset{\smile}{AB}$, направлена по нормали к поверхности, а значит, ее работа при перемещении по поверхности равна нулю.

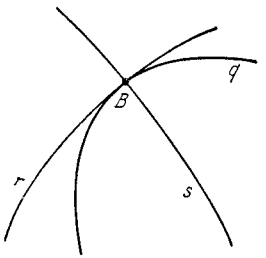
Геодезической касательной к кривой q на поверхности в точке B называется геодезическая линия r, имеющая общую с q касательную в точке B; *геодезической нормалью* к кривой q в точке B называется геодезическая кривая s, ортогональная к q в точке B (черт. 74).

---

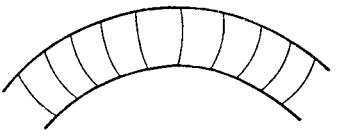
[1]) Фактически мы доказали эту теорему для точек, расположенных на той части параболы, которая лежит слева от прямой d_1. Но так как положение этой прямой (параллельной d) произвольно, то теорема справедлива для всех точек параболы.

Теорема 1 об общих нормалях обобщается на случай геодезических нормалей.

Теорема 4. *Пусть две кривые q и q_1 на поверхности имеют все геодезические нормали общими. Отрезки общих геодезических нормалей между q и q_1 имеют равные длины* (черт. 75).



Черт. 74.



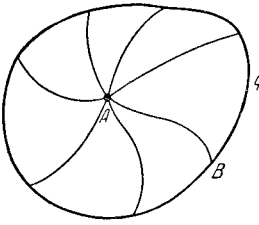
Черт. 75.

Пример. Отрезки меридианов на поверхности шара между двумя параллелями имеют равные длины.

Доказательство теоремы 4 повторяет доказательство теоремы 1.

5. Геодезическая окружность. Отложим от точки A поверхности всевозможные геодезические дуги $\overset{\smile}{AB}$ равной длины. Геометрическое место q их концов B называют *геодезической окружностью*; геодезические дуги $\overset{\smile}{AB}$ называют *геодезическими радиусами* (черт. 76).

Каждый геодезический радиус $\overset{\smile}{AB}$ есть геодезическая нормаль к геодезической окружности в точке B.

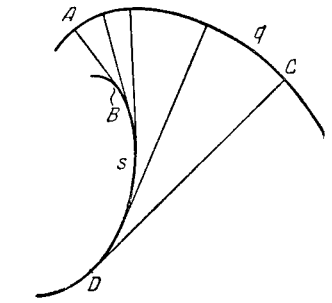


Черт. 76.

В самом деле, пусть упругая нить $\overset{\smile}{AB}$, закрепленная в конце A и имеющая форму геодезического радиуса, смещается, так что ее конец B описывает геодезическую окружность q. Так как длина геодезической дуги $\overset{\smile}{AB}$ не меняется, то работа сил натяжения равна нулю. Эта работа сводится к работе сил натяжения в конце B. Значит, работа сил натяжения в точке B все время равна нулю. Силы натяжения направлены по нормали к линии смещения q. А так как их направление в точке B есть направление, касательное к радиусу $\overset{\smile}{AB}$, то приходим к нашей теореме.

§ 12. Эволюты и эвольвенты

Рассмотрим плоскую кривую q, пучок нормалей, проведенных из различных точек этой кривой, и *огибающую* s этих нормалей (т. е. кривую s, касающуюся этих нормалей). Огибающая s называется *эволютой* кривой q, а кривая q, секущая ортогонально все касательные к эволюте s, — ее *эвольвентой* (черт. 77).



Черт. 77.

Каждая точка B эволюты есть точка пересечения нормали AB к эвольвенте и бесконечно близкой к ней нормали $A'B'$, т. е. точка B есть центр кривизны для кривой q в точке A (см. § 6). Эволюту s кривой q можно определить как *геометрическое место центров кривизны этой кривой.*

Пусть упругая нить имеет форму кривой r, состоящей из отрезка нормали AB к эвольвенте и дуги $\overset{\smile}{BD}$ эволюты s (см. черт. 77). Двигаясь по этой кривой от A к D, мы имеем *гладкий* переход в точке B от отрезка AB к дуге BD. Поэтому упругая нить в положении $r = \overset{\smile}{ABD}$ находится в состоянии равновесия. Будем перемещать нить r так, чтобы конец A ее двигался по эвольвенте, а точка B — по эволюте; тогда AB сохраняет свое положение нормали к эвольвенте, а оставшаяся часть нити BD прилегает к кривой s. Работа сил натяжения, действующих на точки нормали AB, равна их работе в точках A и B. Но в точке A эта работа равна нулю, так как силы натяжения действуют по нормали к кривой q, по которой скользит конец A. Силы натяжения, действующие в точке B, уравновешиваются и их работа в каждый данный момент равна нулю. Наконец, на не участвующей в данный момент в движении части $\overset{\smile}{BD}$ нити r работа равна нулю. Итак, работа сил натяжения в каждый момент равна нулю. Во время нашего движения потенциальная энергия нити r остается неизменной, а значит, остается неизменной и длина нити r.

Если $\overset{\smile}{ABD}$ — начальное положение нити r, а отрезок CD — ее конечное, то длина $\overset{\smile}{ABD}$ равна длине CD:

$$l(\overset{\smile}{ABD}) = l(CD).$$

Но

$$l(\overset{\smile}{ABD}) = l(AB) + l(\overset{\smile}{BD})$$

или

$$l(CD) = l(AB) + l(\overset{\smile}{BD}),$$

откуда

$$l(\overset{\smile}{BD}) = l(CD) - l(AB).$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Если в двух точках A и C эвольвенты провести их нормали AB и CD до их точек касания B и D с эволютой, то разность длин этих отрезков нормалей равна длине заключенной между ними дуги эволюты* $\overset{\smile}{BD}$.

Черт. 78.

Если к кривой q на поверхности провести пучок ее геодезических нормалей (черт. 78), то их огибающая s называется *геодезической эволютой* кривой q, а кривая q — *геодезической эвольвентой* кривой s. Теорема сохраняет свою силу, если слова «нормали», «эволюта», «эвольвента» понимать как геодезические нормали, геодезические эволюту и эвольвенту. Читатель может убедиться, что доказательство проходит и в этом случае.

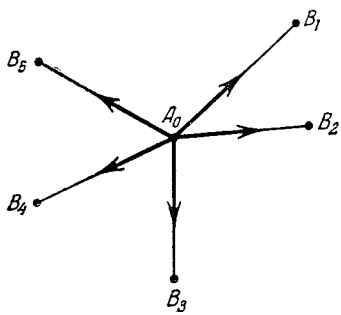
§ 13. Задачи на равновесие системы упругих нитей

1. Принцип Дирихле. *Для механической системы положение минимума ее потенциальной энергии является положением равновесия.* В самом деле, если неподвижная механическая система смещается из положения S минимума потенциальной энергии, то потенциальная энергия ее может только возрасти; а значит, по закону сохранения энергии ее кинетическая энергия может только убывать. Поэтому если в положении S система находилась в неподвижном состоянии, т. е. при нулевом значении кинетической энергии, то при смещении она не может приобрести положительной кинетической энергии, т. е. не может начать двигаться.

Пример. Для упругой нити потенциальная энергия пропорциональна ее длине. Поэтому положение, при котором нить имеет наименьшую длину, есть положение равновесия нити. Мы неоднократно пользовались этим обстоятельством.

Приведем две задачи на нахождение равновесия системы из *нескольких* нитей (вторая из этих задач важна для дальнейшего).

2. Задача о минимуме суммы длин. На плоскости даны точки B_1, $B_2, \ldots$, B_n. Найти точку A, сумма расстояний которой от данных точек наименьшая. Рассмотрим n упругих нитей AB_1, $AB_2, \ldots$, AB_n, у которых один конец A общий (например, нити связаны между собой в точке A), другие концы закреплены соответственно в точках B_1, B_2, . . . , B_n. Потенциальная энергия нашей системы нитей пропорциональна сумме длин нитей AB_1, $AB_2, \ldots$, AB_n. Минимальной сумме длин нитей, т. е. минимальной потенциальной энергии, отвечает положение равновесия системы. В этом положении каждая нить становится прямолинейным отрезком, и сумма длин этих отрезков минимальная. Пусть A_0 есть положение точки A в этом состоянии равновесия (черт. 79). На A_0 действуют n равных сил натяжения, действующих по направлениям A_0B_1, $A_0B_2, \ldots$, A_0B_n. Эти n сил уравновешиваются. Итак, в точке A_0, для которой сумма расстояний до точек B_1, $B_2, \ldots$, B_n минимальная, равнодействующая n равных сил, действующих в направлениях A_0B_1, $A_0B_2, \ldots$, A_0B_n, равна нулю [1]).



Черт. 79.

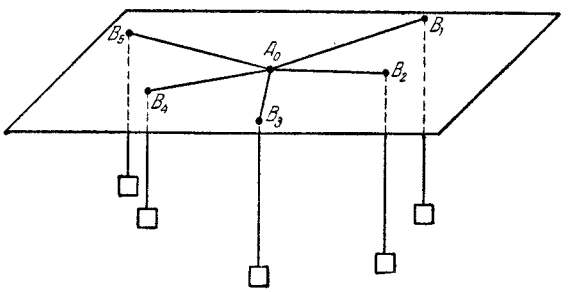
Можно нахождение такой точки A_0 реализовать механически: на горизонтальной пластинке сделаны n отверстий

---

[1]) М. Я. Выгодский указал, что это предложение нуждается в уточнении. Оно справедливо, если точка A, для которой сумма длин AB_1, $AB_2, \ldots$, AB_n минимальна, *не совпадает* ни с одной из точек B_1, $B_2, \ldots$, B_n.

Например, в случае трех точек B_1, B_2, B_3 точка A лежит внутри треугольника $B_1B_2B_3$, если ни один из его углов не больше 120°. Если же один из них, например при вершине B_1, равен или больше 120°, то точка A совпадает с этой вершиной.

в точках B_1, B_2, ..., B_n (черт. 80); мы скрепляем n веревочек в одной точке над пластинкой, пропускаем эти веревочки сквозь отверстия и привешиваем к ним гири равного веса. Наша система веревочек с гирями придет в состояние равновесия, и общая точка веревочек в состоянии равновесия и есть искомая точка A_0. В самом деле, на эту точку действуют n равных сил натяжения веревочек, направленных к отверстиям B_0, B_1, ..., B_n (каждая из них равна весу привешенного к веревочке груза). Эти n равных сил уравновешены.



Черт. 80.

К нашей задаче сводится следующая: даны n пунктов B_1, B_2, ..., B_n; требуется построить в точке A склад и прямолинейные дороги от него AB_1, AB_2, ..., AB_n. Найти самое выгодное положение склада так, чтобы сумма длин дорог AB_1, AB_2, ..., AB_n была наименьшей.

Иногда эту задачу усложняют: пусть грузопотоки от склада A к пунктам B_1, B_2, ..., B_n пропорциональны соответственно q_1, q_2, ..., q_n. Требуется выбрать положение точки A, для которой сумма

$$S = q_1\overline{AB}_1 + q_2\overline{AB}_2 + \ldots + q_n\overline{AB}_n$$

будет наименьшая (т. е. для которой при подвозке грузов по путям AB_1, AB_2, ..., AB_n количество тонно-километров будет наименьшим).

Задача решается так же, как предыдущая (которая является ее частным случаем при $q_1 = q_2 = \ldots = q_n$). Ищется положение равновесия системы из n нитей AB_1, AB_2, ..., AB_n, закрепленных в точках B_1, B_2, ..., B_n с общей точкой A.

Но нити AB_1, $AB_2, \ldots$, AB_n имеют разные натяжения, пропорциональные числам q_1, $q_2, \ldots$, q_n, — соответственно q_1T, $q_2T, \ldots$, q_nT. Потенциальная энергия нитей AB_1, $AB_2, \ldots$, AB_n равна соответственно $q_1T\overline{AB}_1$, $q_2T\overline{AB}_2, \ldots$, $q_nT\overline{AB}_n$. Общая потенциальная энергия системы равна

$$V = T(q_1\overline{AB}_1 + q_2\overline{AB}_2 + \ldots + q_n\overline{AB}_n) = TS. \qquad (1)$$

Положение наименьшего значения V, т. е. наименьшего значения суммы S, есть положение равновесия системы. Каждая линия AB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, при этом превращается в прямолинейный отрезок. Общая точка $A = A_0$ этих нитей находится в равновесии под влиянием n сил натяжения, направленных по отрезкам A_0B_1, $A_0B_2, \ldots$, A_0B_n, и пропорциональна числам q_1, $q_2, \ldots$, q_n.

Механический способ нахождения искомой точки A_0, изложенный выше, сохраняет силу; однако грузы, прикрепленные к концам веревочек, продетых через отверстия в точках B_1, $B_2, \ldots$, B_n, должны быть пропорциональны числам q_1, $q_2, \ldots$, q_n.

3. Одна задача на равновесие системы из двух нитей. Рассмотрим гибкую неоднородную нить, имеющую форму $q = \overset{\smile}{ACB}$ (черт. 81), у которой концы A и B закреплены, а точка C перемещается по кривой s, причем в части $\overset{\smile}{AC}$ нити натяжение равно T_1, в части $\overset{\smile}{CB}$ нити оно равно T_2. Потенциальная энергия $V(q)$ нити равна

$$V(q) = V(\overset{\smile}{AC}) + V(\overset{\smile}{CB}).$$

В силу

$$V(\overset{\smile}{AC}) = T_1 l(\overset{\smile}{AC}),$$

$$V(\overset{\smile}{CB}) = T_2 l(\overset{\smile}{CB})$$

имеем:

$$V(q) = T_1 l(\overset{\smile}{AC}) + T_2 l(\overset{\smile}{CB}). \qquad (2)$$

Пусть в положении q_0 нить q имеет наименьшую потенциальную энергию. В силу принципа Дирихле нить в

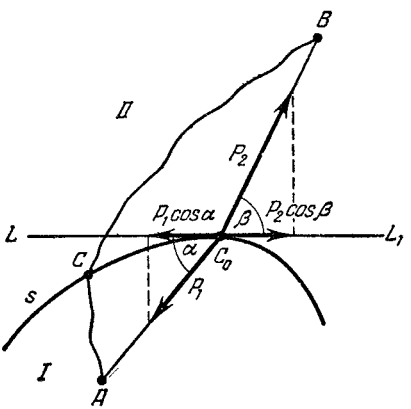
положении q_0 находится в равновесии. Пусть C_0 — точка пересечения q_0 и s.

Легко видеть, что каждая из частей $\overset{\smile}{AC_0}$ и $\overset{\smile}{C_0B}$ линии q_0 есть прямолинейный отрезок. Рассмотрим условия равновесия в точке C_0.

К этой точке приложены силы натяжения: сила P_1, направленная по C_0A, равная T_1, и сила P_2, направленная по C_0B, равная T_2. Проведем касательную LL_1 к кривой s в точке C_0. Обозначим углы:

$$\left.\begin{aligned} \angle AC_0L &= \alpha, \\ \angle L_1C_0B &= \beta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Касательная составляющая силы P_1 равна $P_1 \cos \alpha = T_1 \cos \alpha$ и направлена по C_0L; касательная составляющая силы P_2



Черт. 81.

равна $P_2 \cos \beta = T_2 \cos \beta$ и направлена по C_0L_1. Точка C_0 находится в равновесии, если обе касательные составляющие уравновешиваются, т. е. если

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta. \tag{4}$$

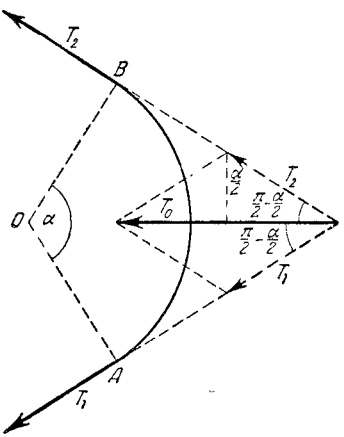
Итак, линия q_0 есть ломаная AC_0B с вершиной C_0 на кривой раздела s, в которой выполняется условие (4).

ГЛАВА V. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

§ 14. Кривизна и геодезическая кривизна

1. Кривизны. Величина $\frac{1}{R}$, обратная радиусу R окружности, называется *кривизной* окружности. Это понятие можно иллюстрировать механически с помощью натянутой нити.

Пусть дана дуга $\overset{\frown}{AB}$ окружности радиуса R с центром O. Будем предполагать, что эта дуга образована упругой нитью, к концам которой приложены равные силы натяжения T_1 и T_2, направленные по касательным, как на черт. 82.



Черт. 82.

Равнодействующая T_0 сил T_1 и T_2 направлена по биссектрисе угла между направлениями сил T_1 и T_2, т. е. по радиусу, делящему дугу $\overset{\frown}{AB}$ пополам. Если эта дуга измеряется в радианах числом α, то ее длина равна $R\alpha$, а стягивающая ее хорда имеет длину $2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Так как очень малую дугу можно приближенно считать равной хорде, то отсюда следует $2R\sin\frac{\alpha}{2}\approx R\alpha$. Таким образом, при очень малых значениях угла α имеем $\sin\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\alpha}{2}$, т. е. малый угол, выраженный в радианах, приближенно равен своему синусу.

Примечание. Точнее, отношение угла к своему синусу стремится к 1, тогда угол стремится к нулю. Доказательство этой теоремы можно найти в любом курсе математического анализа, а также в учебниках тригонометрии (например, Рыбкина).

Для того чтобы сделать наши дальнейшие рассуждения строгими, следует ввести понятие *эквивалентных бесконечно малых величин.*

Бесконечно малой величиной называется переменная величина, стремящаяся к нулю.

Пусть одновременно с величиной α стремится к нулю величина β (например, вместе с длиной дуги стремится к нулю и длина стягивающей ее хорды). Если при этом отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ бесконечно

малых величин β и α тоже является бесконечно малой величиной, то β называется *бесконечно малой* величиной высшего порядка малости сравнительно с α. Например, α^2 — величина высшего порядка малости сравнительно с α.

Две бесконечно малые величины α и γ называются эквивалентными, если их отношение стремится к 1:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma}{\alpha} = 1. \tag{1}$$

Например, хорда, стягивающая дугу, эквивалентна самой дуге.

Разность двух эквивалентных бесконечно малых величин γ и α есть величина бесконечно малая высшего порядка по сравнению с ними. В самом деле, из (1) следует:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} = 0. \tag{2}$$

Поэтому ошибка, которую мы делаем от замены бесконечно малой величины ей эквивалентной, есть бесконечно малая высшего порядка. Например, разность длины бесконечно малой дуги и стягивающей ее хорды есть бесконечно малая высшего порядка. Ошибка, которую мы делаем, приравнивая друг другу дугу и хорду, есть бесконечно малая высшего порядка сравнительно со сравниваемыми величинами.

Для выражения эквивалентности величин α и γ пользуются записью: $\alpha \approx \gamma$.

Пример эквивалентных величин: $\sin \alpha \approx \alpha$ при бесконечно малом α $\left(\text{это есть символическая запись равенства } \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1\right)$.

Угол AOB (черт. 82) в радианном измерении обозначим через α. Тогда угол между направлениями сил T_1 и T_2 равен $\pi - \alpha$, а угол между их направлениями и направлением равнодействующей T_0 равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Из чертежа видно, что $T_0 = 2T \sin \frac{\alpha}{2}$, где T — общая величина сил T_1 и T_2.

Если обозначим длину дуги $\overset{\smile}{AB}$ через s, то ее величина α в радианах выразится так: $\alpha = \frac{s}{R}$.

Следовательно,

$$T_0 = 2T \sin \frac{s}{2R}.$$

Если дуга s очень мала, то

$$\sin \frac{s}{2R} \approx \frac{s}{2R}$$

и

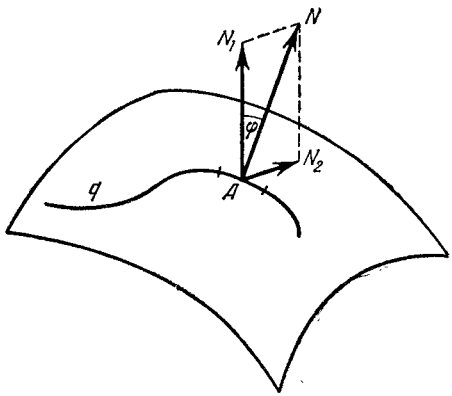
$$T_0 = T \frac{s}{R}.$$

Рассмотрим теперь случай произвольной кривой q. Очень малую дугу длины s этой кривой, содержащую точку A, можно рассматривать как дугу окружности (радиус которой R есть радиус кривизны кривой в точке A). Пусть наша линия q есть упругая нить, в точках которой действует натяжение, равное T. Тогда на нашу дугу в ее концах действуют две силы натяжения, равнодействующая которых в силу предыдущего направлена по радиусу кривизны и равна (точнее, эквивалентна) $T\frac{s}{R}$.

Величина $\frac{1}{R}$ называется кривизной нашей линии в точке A.

Итак, *на малую дугу $\overset{\frown}{AB}$ действует в направлении главной нормали сила, которая пропорциональна длине дуги s и кривизне $\frac{1}{R}$.*

2. Геодезическая кривизна. Рассмотрим (черт. 83) малую дугу длины s кривой q, лежащей на поверхности, и пусть A — середина этой дуги. Кривизну



Черт. 83.

нашей линии в точке A обозначим $\frac{1}{R}$, угол между главной нормалью AN кривой q в точке A и нормалью AN_1 поверхности обозначим через φ. В точке A действует на нашу дугу сила, направленная по главной нормали к кривой q в точке A; величина этой силы равна $T\frac{s}{R}$. Эту силу разложим на две силы: одну, действующую по нормали к

поверхности (эта сила уничтожается реакцией поверхности), и другую, касающуюся поверхности. Эта вторая сила будет заставлять нашу дугу скользить по поверхности. Она равна (или, вернее, эквивалентна)

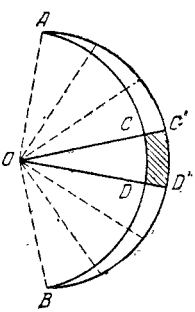
$$\frac{Ts\sin\varphi}{R} = Ts\Gamma.$$

Величина $\Gamma = \frac{\sin\varphi}{R}$ называется *геодезической кривизной* линии q в точке A. Она определяет интенсивность, с которой в точке A на дугу натянутой нити действует сила, заставляющая эту дугу скользить по поверхности; сила, действующая на малую дугу кривой, пропорциональна длине дуги s и геодезической кривизне Γ.

Для геодезической линии, для которой $\varphi = 0$, *геодезическая кривизна равна нулю.* Вдоль геодезической линии отсутствует сила, заставляющая дугу линии скользить по поверхности (нить, натянутая по геодезической, находится в состоянии равновесия).

§ 15. Изопериметрическая задача

1. Измерение длины дуги окружности. Пусть дана окружность q радиуса R и дуга $\overset{\frown}{AB}$ этой окружности. Пусть AB — дуга, близкая к последней [1]). Обозначим через l длину дуги $\overset{\frown}{AB}$, через $l + \Delta l$ — длину дуги AB. Если преобразовать дугу $\overset{\frown}{AB}$ так, чтобы она перешла в дугу AB, то ее длина l увеличится на Δl, а ее потенциальная энергия увеличится поэтому на $T\Delta l$. Будем преобразовывать $\overset{\frown}{AB}$ к AB так, чтобы каждая ее точка C при этом смещалась по радиусу (черт. 84). Пусть очень малая дуга CD (часть $\overset{\frown}{AB}$) перешла в малую же дугу $C'D'$ (часть AB). Каждая точка этой дуги сместилась на отрезок CC' (по



Черт. 84.

[1]) Мы полагаем, говоря о близости новой дуги к дуге окружности, что точки новой дуги близки к точкам старой и кривизна новой дуги близка к кривизне старой.

малости CD считаем смещения ее точек приближенно одинаковыми). Маленькую площадку $CC'D'D$, ограниченную нашими дугами и отрезками CC' и DD', можем приближенно считать прямоугольником, причем если h — длина малой дуги CD, то площадь $CC'D'D$ равна приближенно [1]) hCC':

$$\text{площадь } CC'D'D \approx h \cdot CC'. \tag{1}$$

Заметим, что на дугу CD действует сила, направленная по радиусу и равная $\frac{Th}{R}$, где R — радиус нашей окружности. Работа, которую мы проделываем, перемещая дугу CD до ее совпадения с $C'D'$, равна силе $\frac{Th}{R}$, умноженной на путь CC', т. е. $\frac{Th}{R} CC'$ или (см. (1))

$$\frac{Th}{R} CC' = \frac{T}{R} (\text{площадь } CC'D'D). \tag{2}$$

Итак, *работа, которую нужно совершить для смещения малой дуги CD в новое, близкое положение C'D', равна (точнее, эквивалентна) $\frac{T}{R}$, умноженной на площадь CC'D'D, которую обметет эта дуга в своем перемещении.*

Обозначим площадь, заключенную между дугами $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\frown}{AB}$, через ΔF. Разобьем эту площадь радиусами, исходящими из центра O, на маленькие площадки (аналогичные площадке $CC'D'D$). При этом и дуга $\overset{\smile}{AB}$ разобьется на маленькие дуги. Каждая такая дуга CD в своем перемещении опишет соответственную площадку $CC'D'D$ (заключенную между этой дугой, дугой $C'D'$ и отрезками радиусов CC' и DD'). Работа, которую нужно совершить при таком перемещении, равна $\frac{T}{R}$, умноженной на площадь, описанную этой дугой. Общая работа, которая совершается при смещении всей дуги $\overset{\smile}{AB}$ в положение $\overset{\frown}{AB}$, равна сумме этих работ, т. е. $\frac{T}{R}$, умноженной на сумму этих маленьких

[1]) Приближенное равенство понимается в смысле эквивалентности.

площадок, т. е. $\frac{T}{R}\Delta F$, где ΔF — площадь, обметенная дугой $\overset{\smile}{AB}$ при ее перемещении.

Но произведенная работа равна приращению потенциальной энергии ΔV при изменении дуги $\overset{\smile}{AB}$ в дугу $\overset{\frown}{AB}$:

$$\Delta V \approx \frac{T}{R}\Delta F. \tag{3}$$

С другой стороны, из формулы (2) § 9 следует:

$$\Delta V = T\Delta l, \tag{4}$$

где Δl — приращение длины.

Сравнивая выражения (3) и (4), получаем:

$$\frac{T}{R}\Delta F \approx T\Delta l$$

или

$$\Delta l = \frac{1}{R}\Delta F. \tag{5}$$

Приращение Δl длины дуги $\overset{\smile}{AB}$ равно (точнее, эквивалентно) кривизне $\frac{1}{R}$, умноженной на площадь, заключенную между дугами $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\frown}{AB}$ [1]).

2. Изменение длины дуги произвольной кривой. Если вместо окружности взять произвольную кривую, то ее малую дугу $\overset{\smile}{AB}$ можно рассматривать как дугу окружности радиуса R (R — радиус кривизны), и формула (5) сохраняет силу, если под $\frac{1}{R}$ понимать кривизну кривой в какой-нибудь средней точке дуги $\overset{\smile}{AB}$.

Совершенно аналогичная картина имеет место для кривых, расположенных на поверхности, только всюду вместо

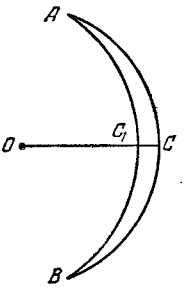
---

[1]) Все равенства — с точностью до величины высшего порядка малости сравнительно с Δl.

кривизны будет фигурировать геодезическая кривизна. Формула (5) перейдет в

$$\Delta l = \Gamma \Delta F, \tag{6}$$

где Γ — геодезическая кривизна, Δl — приращение длины дуги кривой при замене ее близкой дугой на той же поверхности, а ΔF — площадь, расположенная между первоначальной и измененной дугами.



Черт. 85.

На черт. 84 площадь ΔF лежит *вне* круга, дугой которого является $\overset{\smile}{AB}$. На черт. 85 она находится *внутри* круга. В последнем случае площадь ΔF мы будем считать отрицательной. Приращение Δl длины дуги круга также отрицательно (мы имеем не удлинение, а укорочение дуги).

3. Изопериметрическая задача. Рассмотрим следующую задачу. *Среди всех замкнутых кривых, ограничивающих площадь данной величины F, найти ту, которая имеет наименьшую длину.*

Мы полагаем, что такая кривая существует. Докажем, что она является окружностью.

Заметим, что кривая постоянной кривизны $\left(\text{т. е. кривая, имеющая во всех точках одинаковую кривизну } \frac{1}{R}\right)$ есть окружность.

Мы дадим доказательство этого факта, отнюдь не претендующее на строгость.

Очень малую дугу кривой постоянной кривизны $\frac{1}{R}$ можно рассматривать как дуги окружности радиуса R. Будем рассматривать всю кривую как состоящую из очень большого числа таких малых дуг, причем две соседние дуги отчасти налегают друг на друга. Две малые дуги окружности одного радиуса, частично налегающие друг на друга, образуют новую дугу того же радиуса. Таким образом, каждая пара смежных маленьких дуг, на которые разбита наша кривая, образует дугу окружности радиуса R. Продолжая эти рассуждения, мы убедимся, что каждые 3, 4, 5 и т. д. последовательных малых дуг образуют дугу окружности радиуса R, а следовательно, и вся кривая образует дугу окружности радиуса R. Если мы имеем замкнутую кривую с постоянной кривизной R, то она есть просто окружность радиуса R.

Пусть мы имеем замкнутую кривую q, обладающую наименьшей длиной среди всех кривых, ограничивающих заданную площадь F. Положим, что она не является окружностью, т. е. не обладает всюду одинаковой кривизной.

Пусть, например, в точках A и B этой кривой (черт. 86) кривизна разная и равна соответственно

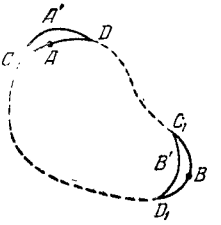
$$\frac{1}{R_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_2},$$

где

$$R_1 \neq R_2.$$

Для определенности положим

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2}.$$



Черт. 86.

Рассмотрим две малые дуги $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{C_1D_1}$ нашей кривой q, содержащие точки A и B. Заменим дугу $\overset{\frown}{CD}$ близкой дугой $\overset{\frown}{CA'D}$, а дугу C_1D_1 — близкой дугой $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$. Обозначим через ΔF_1 площадь, ограниченную $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{CA'D}$, через ΔF_2 — площадь, ограниченную $\overset{\frown}{C_1D_1}$ и $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$. В силу формулы (5) от замены дуги $\overset{\frown}{CD}$ дугой $\overset{\frown}{CA'D}$ длина кривой q получит приращение, равное (точнее, эквивалентное) $\frac{1}{R_1}\Delta F_1$, а от замены дуги $\overset{\frown}{C_1D_1}$ дугой $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$ длина q получит приращение, равное $\frac{1}{R_2}\Delta F_2$. Общее приращение площади, ограниченной q, равно $\Delta F_1 + \Delta F_2$, а приращение длины равно (эквивалентно)

$$\frac{1}{R_1}\Delta F_1 + \frac{1}{R_2}\Delta F_2.$$

Выберем теперь дуги $\overset{\frown}{CA'D}$ и $\overset{\frown}{C_1B'D_1}$ так, чтобы ΔF_1 и ΔF_2 были равны по абсолютному значению и обратны по знаку, причем $\Delta F_1 > 0$, а $\Delta F_2 = -\Delta F_1 < 0$. Тогда приращение площади $\Delta F_1 + \Delta F_2 = 0$ — площадь при нашем изменении кривой q не изменилась. Приращение же длины q равно (вернее, эквивалентно)

$$\Delta F_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

а так как

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2},$$

то

$$\Delta F_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) < 0.$$

Итак, приращение длины q отрицательно. Кривая q перешла в другую кривую q_1 меньшей длины, ограничивающую ту же площадь. Значит, q не есть кривая, обладающая наименьшей длиной среди кривых, ограничивающих данную площадь.

Отсюда вывод: *кривая наименьшей длины среди кривых, ограничивающих данную площадь, есть окружность* [1]).

4. Изопериметрическая задача на поверхности. Аналогичные задачи можно рассматривать и на поверхности, только всюду роль кривизны играет геодезическая кривизна $\Gamma = \frac{\sin\varphi}{R}$. Например, если малая дуга $\overset{\smile}{CD}$ кривой q с геодезической кривизной $\Gamma = \frac{\sin\varphi}{R}$ заменяется близкой дугой $\overset{\smile}{CA'D}$, причем площадь, заключенная между $\overset{\smile}{CD}$ и $\overset{\smile}{CA'D}$, равна ΔF, то приращение Δl длины, которое получает кривая при замене $\overset{\smile}{CD}$ дугой $\overset{\smile}{CA'D}$, выразится:

$$\Delta l = \Delta F \frac{\sin\varphi}{R} = \Gamma \Delta F.$$

Повторяя доказательство предыдущей теоремы, но с заменой всюду кривизны геодезической кривизной, получим теорему.

Среди всех замкнутых кривых на поверхности, ограничивающих данную площадь, наименьшую длину имеет кривая постоянной геодезической кривизны (на поверхности шара такими линиями являются большие и малые круги).

Примечание. На поверхности шара, как и на плоскости, кривая постоянной геодезической кривизны есть геодезическая окружность.

На других поверхностях кривые постоянной геодезической кривизны не являются вообще геодезическими окружностями.

---

[1]) Целый ряд других доказательств изопериметрических свойств окружности приведен в книге Д. А. Крыжановского, Изопериметры, максимальные и минимальные свойства геометрических фигур в общедоступном изложении, М.—Л., ОНТИ, 1938; см. также Л. А. Люстерник, Выпуклые тела, изд. 2-е, М.—Л., Гостехиздат, 1941.

ГЛАВА VI. ПРИНЦИП ФЕРМА И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

§ 16. Принцип Ферма

1. Принцип Ферма. К рассмотренным нами задачам весьма близки задачи геометрической оптики, связанные с так называемым *принципом Ферма.*

Мы рассматриваем плоскую оптическую среду, в каждой точке $A(x, y)$ которой определена скорость света $v = v(x, y) = v(A)$. Среда называется *однородной,* если во всех ее точках скорость света одинакова.

Время $T(q)$, в течение которого при движении со скоростью света проходится кривая q, называется *оптической длиной кривой* q.

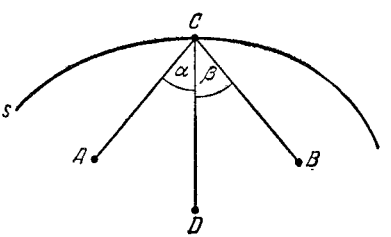
В однородной оптической среде, в которой скорость света равна v, оптическая длина $T(q)$ кривой q пропорциональна ее обычной длине $l(q)$ и равна

$$T(q) = \frac{1}{v} l(q).$$

Принцип Ферма. *В оптической среде путь света от точки A к точке B есть линия наименьшей оптической длины среди всех линий, соединяющих A и B.*

Отсюда следует, что в однородной оптической среде *свет распространяется по прямым линиям.*

2. Закон отражения. В однородной оптической среде дана кривая s (черт. 87), отражающая лучи света (зеркало). Требуется определить линию q_0, по которой свет идет от точки A к точке B, отражаясь от кривой s. Линия q_0 есть кратчайшая из линий q, соединяющих A и B и отражающихся от s. Значит, эта линия (см. § 9) есть ломаная ACB с вершиной C на линии s, причем биссектриса CD угла ACB есть нормаль к кривой s в точке C.

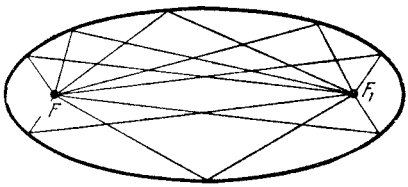


Черт. 87.

Углы $\alpha = ACD$ и $\beta = DCB$ лучей AC и CB с нормалью CD называются *углами падения и отражения.* Приходим к закону отражения света Декарта: *угол падения равен углу отражения.*

Из выведенных в § 9 свойств нормалей к эллипсу и параболе следует:

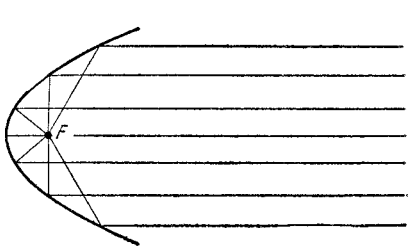
Если кривая s имеет форму эллипса, то лучи, выходящие из фокуса F этого эллипса, отражаясь, собираются в другом фокусе (черт. 88).



Черт. 88.

Если кривая s имеет форму параболы, то лучи, выходящие из фокуса параболы, отражаясь, превращаются в лучи, параллельные оси параболы; и обратно, лучи, параллельные оси параболы, отражаясь, собираются в фокусе параболы (черт. 89).

На этом свойстве параболы основано употребление зеркал в форме параболоида вращения (поверхности, получаемой вращением параболы вокруг оси) в прожекторах, отражательных телескопах (рефлекторах) и т. д.



Черт. 89.

3. Закон преломления. Рассмотрим две однородные оптические среды I и II, разделенные кривой s (см. черт. 81); скорость света равна v_1 в среде I и v_2 в среде II. Найдем путь света $q_0 = \overset{\smile}{AB}$, идущего от точки A среды I к точке B среды II.

Будем рассматривать всевозможные линии q, соединяющие точки A и B, состоящие из дуг $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{CB}$, расположенных

соответственно в I и II среде, где C — точка s. Оптическая длина $T(q)$ кривой q равна

$$T(q)=T(\overset{\smile}{AC})+T(\overset{\smile}{CB})=\frac{l(\overset{\smile}{AC})}{v_1}+\frac{l(\overset{\smile}{CB})}{v_2}. \qquad (1)$$

Линия q_0 есть линия наименьшей оптической длины среди всех кривых q.

Рассмотрим также гибкую неоднородную нить q, закрепленную в точках A и B, у которой промежуточная точка C скользит по кривой s, причем натяжение в части AC кривой q равно $T_1=\frac{1}{v_1}$, а в части CB равно $T_2=\frac{1}{v_2}$.

В силу (2) § 13 потенциальная энергия $V(q)$ равна

$$V(q)=\frac{l(\overset{\smile}{AC})}{v_1}+\frac{l(\overset{\smile}{CB})}{v_2}. \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получаем:

$$T(q)=V(q).$$

Потенциальная энергия нити q совпадает с ее оптической длиной. Значит, q_0 — линия наименьшей оптической длины среди кривых q — есть линия наименьшей потенциальной энергии среди кривых q.

В силу (4) § 13 q_0 есть ломаная AC_0B. Пусть α и β суть углы, образованные отрезками AC_0 и C_0B с касательной LL_1 к кривой s в точке C_0. Из формулы (4) § 13 следует:

$$\frac{\cos\alpha}{v_1}=\frac{\cos\beta}{v_2}. \qquad (3)$$

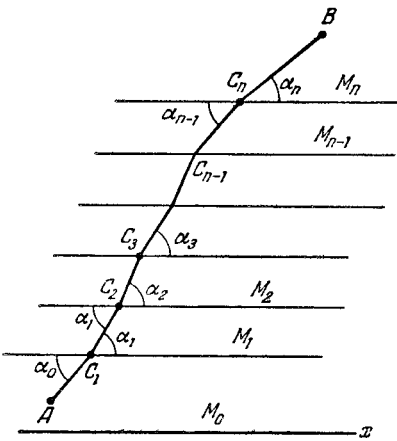
В этом и заключается *закон преломления света*. Пусть α_1 и β_1 — углы, дополнительные до прямого к углам α и β, т. е. углы отрезков AC_0 и C_0B с нормалью к s в точке C_0. Угол α_1 называют *углом падения*, β_1 — *углом отражения*. Формула (3) запишется в виде

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\beta_1}{v_2}.$$

§ 17. Кривая рефракции

1. Простейший случай. Пусть плоскость разбита прямыми, параллельными оси x, на полосы, в каждой из которых скорость света постоянна (черт. 90). Выберем точки A и B, лежащие в разных полосах. Полоса M_0

содержит точку A, полоса M_n — точку B; между ними последовательно расположены полосы $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Скорость света в полосе M_0 равна v_0, в M_1 равна $v_1, \ldots$, в M_n равна v_n. Луч света, идущий от точки A к точке B, имеет форму ломаной $AC_1C_2 \ldots C_nB$, вершины которой лежат на линиях раздела между полосами. Углы между сторонами AC_1, C_1C_2, C_2C_3, $\ldots$, $C_{n-2}C_{n-1}$, $C_{n-1}C_n$, C_nB этой ломаной и прямыми, параллельными оси x, обозначим соответственно: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. В точке C_1 выполняется отношение



Черт. 90.

$$\frac{\cos\alpha_0}{v_0} = \frac{\cos\alpha_1}{v_1}$$

(в силу закона преломления); в точке C_2:

$$\frac{\cos\alpha_1}{v_1} = \frac{\cos\alpha_2}{v_2}$$

и т. д., наконец, в точке C_n:

$$\frac{\cos\alpha_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\cos\alpha_n}{v_n}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\cos\alpha_0}{v_0} = \frac{\cos\alpha_1}{v_1} = \frac{\cos\alpha_2}{v_2} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{\cos\alpha_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\cos\alpha_n}{v_n}. \quad (1)$$

Обозначим общее значение всех этих отношений через c, тогда их можно записать в виде

$$\frac{\cos\alpha}{v} = c, \quad (2)$$

где α есть угол наклона некоторой стороны ломаной к оси x, v — скорость света вдоль этой стороны.

Касательная к ломаной в точке какой-нибудь ее стороны есть прямая, на которой эта сторона лежит. Можно поэтому считать, что α в уравнении означает угол наклона касательной в точке ломаной к оси x, а v — скорость света в той же точке.

2. Кривая рефракции. Рассмотрим оптическую среду, в которой скорость света зависит от ординаты:

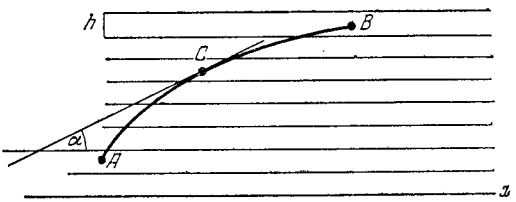
$$v = v(y),$$

при этом v есть непрерывная функция y. *Путь света q в такой среде есть линия, вдоль которой*

$$\frac{\cos\alpha}{v} = c, \tag{3}$$

где v — скорость света в произвольной точке C кривой q (черт. 91), α — угол между касательной к q в точке C и осью x, c — постоянная величина (не зависящая от выбора точки C на кривой).

Для того чтобы обосновать уравнение (3), изменим несколько распределение скоростей света в среде, именно разобьем ее на узкие полоски ширины h и будем считать в каждой полоске скорость света постоянной, равной, например, скорости света в середине этой полоски (черт. 91). Тогда путь света от точки A к точке B станет в силу предыдущего ломаной $(AB)_h$ с вершинами на линиях раздела между полосками, причем для ломаной $(AB)_h$ выполняется



Черт. 91.

в силу предыдущего уравнение (3). Мы несколько изменили распределение скоростей, но изменение будет тем меньше, чем уже будут наши полоски.

В пределе, когда ширина полосок h стремится к нулю, мы получаем наше первоначальное непрерывное распределение скоростей света. При этом ломаные $(AB)_h$ стремятся к кривой q, для которой также будет выполняться условие (3).

3. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Верхнюю полуплоскость, ограниченную осью x, будем рассматривать как оптическую среду, в которой скорость света в точке равна ее ординате:

$$v = y.$$

Лучами света в этой среде будут полуокружности с центрами в точках оси x (черт. 92).

Рассмотрим, в самом деле, такую полуокружность q с центром в точке O оси x. В ее точке A ордината пусть равна y, угол ACO касательной в этой точке с осью x равен углу α. Если R — радиус этой окружности, то

$$y = R \sin \beta,$$

где

$$\beta = \angle AOC = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

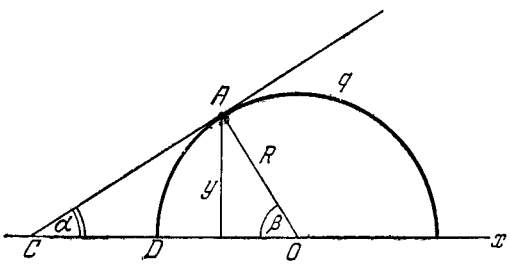
или

$$y = R \cos \alpha,$$

т. е.

$$\frac{\cos \alpha}{y} = R.$$

Итак, полуокружность q удовлетворяет уравнению (3), т. е. уравнению луча света в нашей среде. По мере приближения к оси y скорость стремится к нулю.



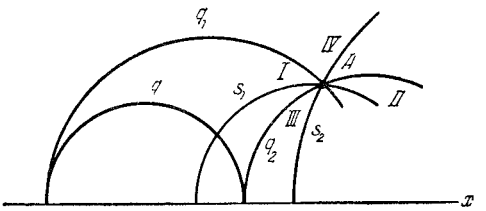
Черт. 92.

Можно показать, что часть AD полуокружности q, один из концов которой лежит на оси x, имеет бесконечную оптическую длину. Точки оси x мы будем называть поэтому *«бесконечно удаленными»*.

Будем считать полуокружности с центром на оси — *«прямыми»*, оптические длины дуг таких полуокружностей — их *«длинами»*, *углами* между такими прямыми — углы в точке их пересечения (углы между их касательными).

Получим плоскую геометрию, в которой многие предложения обычной геометрии сохраняют силу. Так, через две точки можно провести одну и только одну «прямую»

(через две точки на полуплоскости можно провести только полуокружность с центром на оси x). «Отрезок» обладает наименьшей «длиной» среди всех линий, соединяющих его концы. «*Параллельными*» естественно считать две прямые, имеющие общую «бесконечно удаленную точку» (т. е. две полуокружности, касающиеся друг друга на оси x, на которой лежат их центры). Через данную точку A, не лежащую на «прямой» q, можно провести две «прямые» q_1 и q_2, параллельные q (черт. 93). Эти прямые делят полуплоскость на четыре «угла» с вершиной A. Прямые s_1, которые проходят через A и лежат в первой паре вертикальных углов I и II, пересекают «прямую» q. Все же



Черт. 93.

прямые s_2, которые лежат в углах III и IV, не пересекают q.

Мы получили реализацию геометрии Лобачевского на плоскости, так называемую модель Пуанкаре этой геометрии.

В книге Б. Н. Делоне (Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского, М., Изд. АН СССР, 1953) дается подробное исследование этой модели.

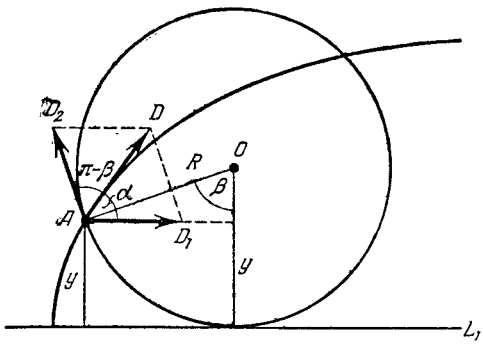
§ 18. Задача о брахистохроне

1. Циклоида. Пусть окружность K радиуса R катится по прямой LL_1, которую мы примем за ось x (черт. 94). Движение окружности складывается из двух движений: 1) из вращения вокруг центра O с угловой скоростью ω; линейная скорость точек окружности равна при этом $v = R\omega$; 2) из поступательного движения параллельно оси x с той же скоростью v. Точка A окружности описывает при этом линию, называемую *циклоидой*.

Пусть в момент $t=0$ точка A находилась на оси x (см. черт. 94). К моменту t окружность повернулась на угол $\beta=t\omega$. Ордината y точки A в этот момент равна

$$y=R(1-\cos\beta)=2R\sin^2\frac{\beta}{2}. \qquad (1)$$

Определим направление скорости точки A в этот момент. Это будет направлением касательной к циклоиде.



Черт. 94.

Скорость $T_1=AD_1$ поступательного движения равна v и направлена параллельно оси x. Скорость $T_2=AD_2$ движения по окружности равна также v и направлена по касательной к окружности. Угол D_1AD_2 равен $(\pi-\beta)$. При сложении этих скоростей по правилу параллелограмма найдем скорость движения точки A по циклоиде. Она направлена по биссектрисе угла D_1AD_2 и образует угол

$$\frac{1}{2}(\pi-\beta)=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$$

с направлением оси x (см. черт. 91). Итак, угол α между касательной к циклоиде в точке A и осью x равен

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}.$$

Поэтому

$$\cos\alpha=\sin\frac{\beta}{2}. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует:

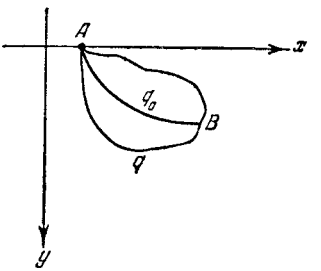
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{y}{2R}}$$

или

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}} = c. \tag{3}$$

Уравнение (3) связывает угол α наклона касательной к циклоиде в ее точке A с ординатой y этой точки. Обратно, кривая, удовлетворяющая этому уравнению, есть циклоида.

2. Задача о брахистохроне. Пусть A и B — две точки (B предполагается расположенной ниже, чем точка A (черт. 95)). Соединим точки A и B линией q; точка, двигаясь от A к B по q без начальной скорости под влиянием силы тяжести, пройдет кривую q в некоторый промежуток времени, который называют *временем падения* по кривой q.



Черт. 95.

Требуется найти кривую q быстрейшего падения (по-гречески — *брахистохрону*), соединяющую точки A и B, т. е. кривую, для которой время падения от A к B наименьшее.

В вертикальной плоскости, содержащей точки A и B, примем в качестве оси x горизонтальную прямую, на которой лежит точка A, а ось y направим вертикально вниз. Скорость v точки, движущейся под влиянием силы тяжести без начальной скорости, и ордината y этой точки связаны соотношением:

$$v^2 = 2gy$$

или

$$v = \sqrt{2g}\,\sqrt{y}. \tag{4}$$

Представим себе оптическую среду, в которой скорость света v определяется по формуле (4); оптическая длина кривой q совпадает с временем падения по этой кривой. Путь света q_0 от точки A к точке B есть кривая наименьшей оптической длины среди кривых, соединяющих точки A и B; поэтому q_0 совпадает с брахистохроной.

Для линии q_0 выполняется равенство (см. (3) § 17)

$$\frac{\cos\alpha}{v} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2g}\sqrt{y}} = c \quad (c — \text{постоянная})$$

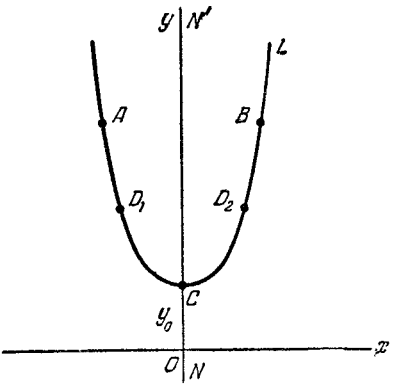
или

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}} = c_1 \quad (c_1 = c\sqrt{2g}).$$

Отсюда в силу приведенных выше свойств циклоиды (см. формулу (3)) *брахистохрона есть дуга циклоиды.*

§ 19. Цепная линия и задача о наименьшей поверхности вращения

1. Цепная линия. Тяжелая однородная цепь (или нерастяжимая нить), закрепленная в двух точках A и B, под влиянием силы тяжести располагается в положении равновесия по кривой, называемой *цепной линией* (черт. 96). (Однородность цепи означает, что ее плотность ρ постоянная; любой участок цепи длины h имеет массу ρh.)



Черт. 96.

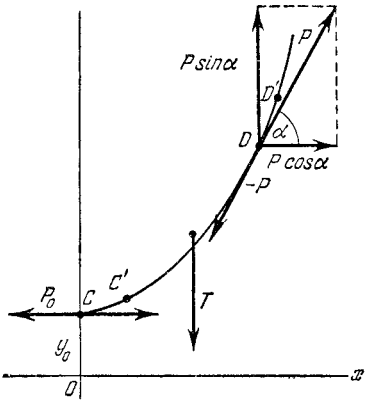
Если цепь $\overset{\frown}{AB}$ дополнительно закрепить в точках D_1 и D_2, то положение равновесия части $\overset{\frown}{D_1D_2}$ цепи не изменится. Цепная линия $\overset{\frown}{AB}$ есть продолжение цепной линии $\overset{\frown}{D_1D_2}$. Можно считать, что цепная линия неограниченно продолжается в обе стороны, что линия $\overset{\frown}{AB}$ есть часть *неограниченной цепной линии.*

Точка C цепной линии, имеющая наинизшее положение, называется ее *вершиной.* Неограниченная цепная линия симметрична относительно вертикальной оси NN', проходящей через вершину. Примем эту ось за ось y.

Будем рассматривать правую часть $\overset{\frown}{CL}$ цепной линии. Через y будем обозначать ординату некоторой точки D

цепной линии (черт. 97), через α — угол между касательной в этой точке и осью x, через s — длину дуги $\overset{\smile}{CD}$ цепной линии.

Закрепим цепную линию в точках C и D. Сила, действующая на точку D, называется *натяжением* P цепи в точке D и направлена по касательной к цепной линии в точке D (черт. 97). Сила P_0, действующая на точку C, направлена по касательной к цепной линии в этой точке, т. е. параллельна оси x (притом направлена влево).



Черт. 97.

Равнодействующая T сил тяжести, действующих на участок $\overset{\smile}{CD}$ цепи, направлена параллельно оси y вниз; масса участка $\overset{\smile}{CD}$ длины s равна $s\rho$. Отсюда величина T равна

$$T = g\rho s, \qquad (1)$$

где g — постоянная силы тяжести. Сила P имеет вертикальную составляющую, направленную вверх и равную

$$P\sin\alpha,$$

и горизонтальную составляющую, направленную вправо и равную

$$P\cos\alpha.$$

Если цепная линия затвердеет, то она останется равновесна. Действующие на цепную линию горизонтальные силы P_0 и $P\cos\alpha$ и вертикальные T и $P\sin\alpha$, направленные в противоположные стороны, уравновешиваются, откуда в силу (1)

$$P\sin\alpha = g\rho s, \qquad (2)$$

$$P\cos\alpha = P_0. \qquad (3)$$

Пусть теперь цепь перемещается по нашей цепной линии так, что каждая ее точка опишет малую дугу цепи длины h. При этом цепь перейдет в положение $C'D'$.

Найдем работу, которую надо затратить на такое перемещение цепи.

Сила P, приложенная в точке D, выполнит работу, равную Ph; сила P_0 в точке D — равную $-P_0h$. Итак, общая работа, затраченная на перемещение цепи, равна

$$R=(P-P_0)\,h. \tag{4}$$

Цепь в старом положении $\overset{\smile}{CD}$ состоит из участка $\overset{\smile}{C'D}$ и малого дополнительного участка $\overset{\smile}{CC'}$. Цепь в новом положении $\overset{\smile}{C'D'}$ состоит из того же участка $\overset{\smile}{C'D}$ и дополнительного участка $\overset{\smile}{DD'}$. Оба дополнительных участка $\overset{\smile}{CC'}$ и $\overset{\smile}{DD'}$ имеют равную длину h, равные массы ρh, но $\overset{\smile}{CC'}$ имел вертикальную ординату y_0, а $\overset{\smile}{DD'}$ — ординату y. Результатом затраченной работы было то, что вместо добавочного участка с ординатой y_0 появился участок той же массы и ординаты y. Отсюда мы видим, что затраченная работа равна

$$R=g\rho h\,(y-y_0). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует:

$$P-P_0=g\rho\,(y-y_0)$$

или

$$P-g\rho y=P_0-g\rho y_0. \tag{6}$$

Если передвигать цепь параллельно себе по направлению оси y, то не изменятся ни форма цепи, ни реакции P в отдельных точках. Мы передвинем цепную линию в направлении оси y так, чтобы ее начальная ордината y_0 стала равной

$$y_0=\frac{1}{g\rho}P_0. \tag{7}$$

Такое положение цепной линии называется *стандартным*. Ниже мы дадим геометрическое определение стандартного положения цепной линии.

В этом положении уравнение (6) упрощается и принимает вид

$$P-\rho gy=0$$

или

$$y = \frac{1}{\rho g} P. \tag{8}$$

Натяжение в точке цепной линии в стандартном положении пропорционально ее ординате.

Из (3) следует:

$$\frac{1}{\rho g} P \cos \alpha = \frac{1}{\rho g} P_0$$

или, если использовать равенства (7) и (8),

$$y \cos \alpha = y_0. \tag{9}$$

Уравнение (9) связывает ординату точки цепной линии с углом α между касательной в этой точке и осью x.

Из сравнения уравнения (9) с уравнением линии рефракции (см. (3) § 17) получаем:

Цепная линия в стандартном положении есть форма луча в среде, скорость света v в которой обратно пропорциональна ординате y:

$$v = \frac{c}{y}.$$

2. Геометрическое определение стандартного положения цепной линии. Из равенств (2) и (8) следует:

$$\frac{1}{\rho g} P \sin \alpha = s,$$

далее,

$$s = y \sin \alpha.$$

Отсюда

$$y - s = y (1 - \sin \alpha).$$

Наконец, в силу (9) получаем:

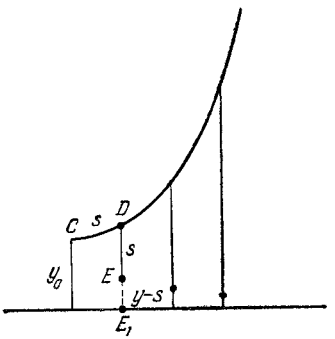
$$y - s = y_0 \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Обозначим $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (β есть угол между касательной

к цепной линии и осью y). Получим:

$$y - s = y_0 \frac{1 - \cos\beta}{\sin\beta} = y_0 \frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}} = y_0 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \quad (10)$$

Рассмотрим отрезок DE, параллельный оси y, направленный вниз и равный длине s (длине дуги $\overset{\smile}{CD}$ цепной линии) (черт. 98). Если сохранить дугу $\overset{\smile}{CD}$ закрепленной в точке D, а точку C оставить свободной, то дуга $\overset{\smile}{CD}$ под влиянием силы тяжести перейдет в новое положение равновесия — вертикальный отрезок DE. Коротко мы скажем: дуга $\overset{\smile}{CD}$ цепи «упадет» в положение DE. Отрезок EE_1 вертикальной линии, равный $y - s$, показывает, насколько отстоит конец E «упавшей» части цепи от оси x.



Черт. 98.

Из формулы (9) следует:

$$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{y_0}{y}. \quad (11)$$

Пусть точка D неограниченно уходит по цепной линии вверх. Ее ордината устремится к бесконечности:

$$y \to \infty.$$

А тогда в силу (11) $\sin\beta$ стремится к нулю. Но тогда и $\beta \to 0$ (угол β между касательной в точке D и осью y стремится к нулю). Вместе с тем, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \to 0$, и в силу (10)

$$\lim_{y\to\infty}(y - s) = 0.$$

Расстояние от конца E упавшей дуги $\overset{\smile}{CD}$ до оси x стремится к нулю, когда конец D этой дуги уходит в бесконечность.

Ось x при стандартном положении цепной линии есть та горизонтальная прямая, к которой неограниченно

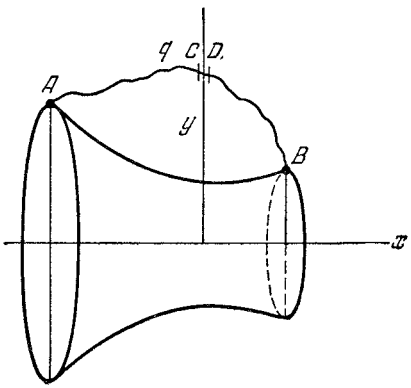
приближается конец упавшей дуги DE, начало которой неограниченно удаляется.

Этим характеризуется стандартное положение цепной линии.

3. Наименьшая поверхность вращения. Решим следующую задачу:

Среди плоских кривых q, соединяющих две заданные точки A и B, найти ту, которая при вращении вокруг оси x даст наименьшую боковую поверхность вращения (черт. 99).

Будем обозначать через $V(q)$ площадь боковой поверхности вращения кривой q вокруг оси x, через $T(q)$ — опти-



Черт. 99.

ческую длину кривой q в среде, в которой скорость света v определяется формулой

$$v=\frac{1}{2\pi y}. \tag{12}$$

Докажем равенство этих величин:

$$V(q)=T(q).$$

Пусть $\overset{\smile}{CD}$ есть малый участок кривой q длины h. Покажем, что

$$V(\overset{\smile}{CD})=T(\overset{\smile}{CD}). \tag{13}$$

Считая $\overset{\smile}{CD}$ малым прямолинейным отрезком и обозначая через y ординату центра тяжести $\overset{\smile}{CD}$, получим: боковая поверхность вращения $V(\overset{\smile}{CD})$ равна боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной h, и радиусом среднего сечения, равным y. Отсюда

$$V(\overset{\smile}{CD}) = 2\pi y h.$$

С другой стороны, если скорость света v в средней точке этого малого отрезка (а значит, приближенно и для всего этого отрезка) равна $\frac{1}{2\pi y}$, то оптическая его длина $T(\overset{\smile}{CD})$ равна

$$T(\overset{\smile}{CD}) = \frac{h}{\frac{1}{2\pi y}} = 2\pi y h,$$

т. е. приходим к равенству (13).

Из равенства оптической длины T и площади боковой поверхности вращения V вокруг оси для малых участков кривой q следует их равенство для всей кривой q. Поэтому если для кривой q величина $V(q)$ достигает наименьшего значения, то для этой же кривой достигает наименьшего значения оптическая длина $T(q)$. В силу принципа Ферма кривая q есть луч света в нашей оптической среде, соединяющий точки A и B. Но в нашей оптической среде луч света имеет форму цепной линии (в стандартном положении).

Итак, среди кривых q, соединяющих точки A и B, наименьшую боковую поверхность вращения $V(q)$ вокруг оси x имеет цепная линия $\overset{\smile}{AB}$ (в стандартном положении).

4. Минимальные поверхности. Подобно тому как мы решали задачу о кратчайших линиях, соединяющих данные точки, можно ставить вопрос о наименьшей поверхности, натянутой на данную кривую (имеющей данную кривую своей границей), — так называемой *минимальной поверхности.*

Если кривая r есть плоская кривая, то ограниченный ею кусок плоскости Q будет минимальной поверхностью, натянутой на кривую r.

Если кривая r не есть плоская кривая, то минимальная поверхность отлична от части плоскости.

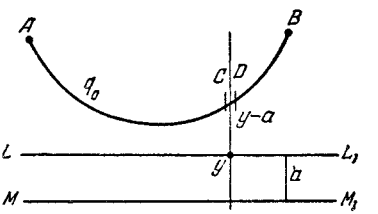
Точки A и B при вращении вокруг оси x образуют две окружности, r_1 и r_2, лежащие в плоскостях, перпендику-

лярных к этой оси с центрами на ней. Поверхность, получаемая при вращении цепной линии $\overset{\smile}{AB}$, соединяющей эти точки, есть минимальная поверхность, натянутая на окружности r_1 и r_2.

5. Изометрическая задача о наименьшей поверхности вращения. Решим более сложную задачу: *среди всех кривых данной длины l, соединяющих точки A и B, найти ту, которая при вращении вокруг оси дает наименьшую боковую поверхность.* Будем считать ось вращения LL_1 горизонтальной (черт. 100).

Соединим точки A и B цепью данной длины l_0. Она примет форму цепной линии $\overset{\smile}{AB}$ данной длины l_0. Примем за ось x горизонтальную прямую MM_1 (параллельную оси вращения LL_1), такую, что относительно нее цепная линия $\overset{\smile}{AB}$ находится в стандартном положении.

Обозначим через $V_1(q)$ боковую поверхность, образованную вращением кривой q вокруг оси x (оси MM_1), через $V(q)$ — вращением кривой q вокруг оси LL_1; $l(q)$ обозначает длину кривой q. Если a есть расстояние от оси LL_1 до оси MM_1, то



Черт. 100.

$$V(q)=V_1(q)-2\pi a l(q). \quad (14)$$

В самом деле, пусть $\overset{\smile}{CD}$ есть малый участок кривой q длины h. Если y есть расстояние середины $\overset{\smile}{CD}$ до оси MM_1, тогда $y-a$ есть ее расстояние до оси LL_1. Длина $l(\overset{\smile}{CD})=h$. Далее,

$$V_1(\overset{\smile}{CD})=2\pi hy, \quad V(\overset{\smile}{CD})=2\pi h(y-a).$$

Так как

$$2\pi h(y-a)=2\pi hy-2\pi ah,$$

то

$$V(\overset{\smile}{CD})=V_1(\overset{\smile}{CD})-2\pi a l(\overset{\smile}{CD}). \quad (15)$$

Итак, формула (14) справедлива для любого малого участка кривой q. Значит, она справедлива и для всей кривой q.

Нас интересуют кривые $\overline{q}$ длины l_0 $l(q_0)=l_0$, соединяющие точки A и B. Для этих кривых

$$V(\overline{q})=V_1(\overline{q})-2\pi l_0 a,$$

т. е. для них величины $V(\overline{q})$ и $V_1(\overline{q})$ отличаются на постоянную величину $2\pi l_0 a$. Для одной и той же кривой q_0 эти величины достигнут поэтому своего минимального значения. Цепная линия q_0, находящаяся относительно оси x в стандартном положении, дает минимум величины $V_1(q)$ — боковой поверхности вращения вокруг этой оси, среди всех кривых, соединяющих точки A и B, в частности среди кривых $\overline{q}$ длины l_0.

Значит, эта же *цепная линия* q_0 *дает минимум величины* $V_1(\overline{q})$ *среди кривых* $\overline{q}$ *длины* l_0, *соединяющих* A *и* B.

Это же свойство цепной линии можно доказать иначе.

Рассмотрим совокупность линий $\overline{q}$, соединяющих точки A и B и обладающих заданной длиной. Каждую такую линию будем рассматривать как положение однородной тяжелой цепи плотности ρ. Потенциальную энергию тяготения цепи в положении $\overline{q}$ обозначим через $U(\overline{q})$. Минимального значения величина $U(\overline{q})$ достигает для цепной линии $\overline{q}=q_0$.

В самом деле, в силу принципа Дирихле (см. § 11) кривая q_0, для которой $U(\overline{q})$ достигает наименьшего значения, есть положение равновесия цепи.

Примем за ось x горизонтальную прямую MM_1 и положим, что плотность ρ равна 2π. Примем эту прямую за прямую, на которой $U=0$. Если y есть ордината середины малого кусочка $\overset{\smile}{CD}$ цепи длины h (черт. 100), то

$$U(\overset{\smile}{CD})=\rho h y=2\pi h y.$$

В то же время боковая поверхность $V(\overset{\smile}{CD})$ вращения этой же малой дуги $\overset{\smile}{CD}$ вокруг оси MM_1 (оси x) равна

$$V(\overset{\smile}{CD})=2\pi h y.$$

Отсюда следует:

$$U(\overset{\smile}{CD})=V(\overset{\smile}{CD}),$$

и мы приходим к равенству

$$U(q) = V(q).$$

В самом деле, из доказанного равенства значения обеих величин, U и V, для любых малых частей кривой q следует их равенство для всей кривой q. Поэтому цепная линия, дающая минимум значения величины $U(\bar{q})$ среди всех кривых $\bar{q}$ данной длины l, соединяющих точки A и B, дает минимум значений для таких кривых и для величины $V(q)$.

Величина, зависящая от кривой, называется функционалом. Так, например, величины $l(q)$, $V(q)$, $T(q)$, $U(q)$ и т. д. являются функционалами.

Яков Бернулли впервые рассмотрел задачу:

Найти среди кривых заданной длины ту, для которой некоторый функционал $J(q)$ достигает наибольшего или наименьшего значения. Такие задачи он назвал *изопериметрическими.* Частный случай этой задачи, рассмотренный в § 15, называют иногда *изопериметрической задачей в узком смысле.* Другой пример изопериметрической задачи рассмотрен нами сейчас.

§ 20. Связь между механикой и оптикой

Будем рассматривать движение точки в некотором плоском поле (в среде, где действуют силы), в котором имеет место механический закон сохранения энергии:

$$U + T = c, \tag{1}$$

где $U = U(x, y)$ — потенциальная энергия движущейся точки, T — ее кинетическая энергия, c — полный запас энергии (остающийся постоянным во время движения). Полагая, что масса точки равна 1, имеем:

$$T = \frac{w^2}{2},$$

где w — скорость точки. Отсюда и из (1) следует:

$$w = \sqrt{2T} = \sqrt{2(c - U)} = \sqrt{2[c - U(x, y)]}. \tag{2}$$

Будем рассматривать всевозможные траектории, т. е. пути, описываемые точкой, при заданном значении полной

энергии c. Из формулы (2) видно, что w — скорость движущейся точки — полностью определяется ее координатами x, y, т. е. ее местоположением.

Например, при движении в поле тяжести $U=gy$, где g — постоянная силы тяжести, y — ордината, направленная вертикально вверх, из формулы (2) следует:

$$w=\sqrt{2(c-gy)}=\sqrt{c_1-c_2y}\ (c_1=2c,\ c_2=2g). \quad (3)$$

Рассмотрим также оптическую среду, в которой скорость света v есть величина, обратная механической скорости w:

$$v=v(x,\ y)=\frac{1}{w(x,\ y)}. \quad (4)$$

Лучи света в среде со скоростью $v=\frac{1}{w}$ *совпадают с траекториями механического движения точки со скоростью* $w=w(x,\ y)$.

В этом заключается установленная Гамильтоном аналогия между механикой и оптикой.

Мы знаем, например, что в поле тяжести, в котором скорость точки выражается по формуле (3), траектории суть параболы; поэтому лучи света в оптической среде со скоростью света $v=\frac{1}{\sqrt{c_1-c_2y}}$ суть параболы.

Мы знаем, что лучи света в среде, в которой скорости света v пропорциональны y, $\frac{1}{y}$, $\sqrt{y}$, суть соответственно полуокружности с центром на оси x, цепные линии, циклоиды. Эти же линии суть траектории механического движения точки со скоростями, пропорциональными соответственно $\frac{1}{y}$, y, $\frac{1}{\sqrt{y}}$.

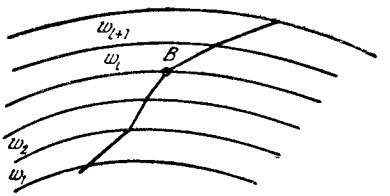
Для обоснования этого положения заметим прежде всего, что силы в поле направлены по нормалям к эквипотенциальным линиям, т. е. к линиям равного значения потенциала

$$(U(x,\ y)=\text{const}),$$

и направлены в стороны меньших значений потенциала каждой такой линии (в силу (2) скорость $w=w\ (x,\ y)$ также постоянная). Приведем систему близких между собой эквипотенциальных линий. На каждой такой линии

скорость w постоянна и непрерывно меняется в полосе между двумя линиями. На черт. 101 через w_1, w_2, ..., w_i, w_{i+1}, ... отмечены эти линии, на которых скорости равны соответственно w_1, w_2, ..., w_i, w_{i+1}, ...

Мы теперь заменим наше движение другим. Пусть в полосе между линиями с отметками w_i и w_{i+1} сохраняется



Черт. 101.

постоянная скорость w_i, которая скачком меняется при переходе через линию с отметкой w_{i+1}. Мы искажаем распределение скоростей, но чем ближе друг к другу линии раздела (чем у́же полосы), чем меньше скачки скоростей, тем ближе скачкообразное распределение скоростей к исходному непрерывному; последнее может рассматриваться как предел скачкообразных распределений, когда ширины полосок стремятся к нулю.

При скачкообразном распределении скоростей вместо непрерывно действующих сил (нормальных к линиям $w = \text{const}$) действуют импульсы силы, нормальные к линиям раздела, вызывающие скачок скорости.

Внутри каждой полосы силы не действуют и движение прямолинейное. Траектории являются ломаными с вершинами в линиях раздела. Рассмотрим участок CBD такой траектории (черт. 102). На отрезке CB скорость равна w_{i-1} и направлена по этому отрезку.

Проведем в точке B касательную MN к кривой раздела и обозначим через α и β углы отрезков CB и BD с этой касательной. Касательные составляющие скоростей в точке B до перелома и после перелома равны соответственно

$$w_{i-1}\cos\alpha \text{ и } w_i\cos\beta.$$

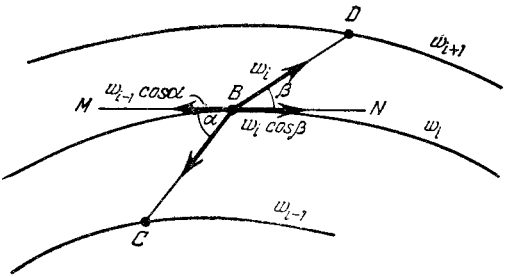
Так как импульс силы направлен по нормали к кривой раздела в точке B, то он не меняет касательных составляющих,

т. е.

$$w_{i-1}\cos\alpha = w_i\cos\beta. \qquad (5)$$

Формула (5) выражает закон преломления траектории при переходе через линию раздела.

Рассмотрим теперь оптическую среду, для которой скорость света обратна скорости механического движения $v=\frac{1}{w}$,



Черт. 102.

т. е. в наших смежных полосах I и II скорость света равна соответственно $v_{i-1}=\frac{1}{w_{i-1}}$, $v_i=\frac{1}{w_i}$. В силу закона преломления света в точке B имеем:

$$\frac{\cos\alpha}{v_{i-1}}=\frac{\cos\beta}{v_i}$$

или

$$w_{i-1}\cos\alpha = w_i\cos\beta.$$

Итак, *лучи в нашей оптической среде преломляются так же, как траектории в механической*; те и другие представляют собой ломаные, одновременно и одинаковым образом преломляющиеся, т. е. траектории со скоростями w_i в i-й полосе совпадают с лучами со скоростями света $v_i=\frac{1}{w_i}$ в той же полосе. Для скачкообразных сред мы наше предложение доказали.

В пределе, когда ширины полос стремятся к нулю и когда мы получаем механическое поле со скоростями $w=w(x, y)$ и оптическую среду со скоростью света $v=v(x, y)=\frac{1}{w(x, y)}$, совпадающие ломаные траектории и

лучи переходят в совпадающие криволинейные траектории и лучи.

Отмеченная Гамильтоном связь между оптикой и механикой играет весьма большую роль в современной физике.

Заметим в заключение, что общие методы решения задач на отыскание максимумов и минимумов функционалов представляют предмет исследований математической дисциплины, называемой *вариационным исчислением*. Основы этой дисциплины заложили великие математики XVIII столетия Л. Эйлер и Ж. Лагранж.

Люстерник Лазарь Аронович.
Кратчайшие линии. Вариационные задачи.

Редактор *А. Ф. Лапко.*
Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*
Корректор *А. С. Каган.*

Сдано в набор 14/IX 1955 г. Подписано к печати 22/XI 1955 г. Т-08433. Бумага 84 × 108/32. Физ. печ. л. 3,25. Условн. п. л. 5,33. Уч.-изд. л. 4,91. Тираж 40 000 экз. Цена книги 1 р. 50 к. Зак. № 403.

Государственное издательство
технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР.
Главное управление полиграфической промышленности. 2-я типография «Печатный Двор»
имени А. М. Горького.
Ленинград, Гатчинская, 26.